Espaces vectoriels (II)

Images et noyau d'applications linéaires

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (2x - y, y + z)$$

1. Montrez que f est une application linéaire.
2. Déterminez le noyau et l'image de f. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2 :

1. Démontrez qu'il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, unique telle que

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), \quad f(1, 1, 0) = (1, 0), \quad f(1, 1, 1) = (1, 1)$$

2. Explicitez pour tout triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z)$.
3. Déterminez l'image et le noyau de f. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 3 : Soit $E = \mathbb{R}^5$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. On considère l'endomorphisme f de E canoniquement associé à la matrice A ci-dessous.

1. Déterminez des bases de $\mathsf{Im}\, f$ et $\mathsf{Ker}\, f$.
2. Montrez que : $E = \mathsf{Im}\, f \oplus \mathsf{Ker}\, f$.
3. f est-il un projecteur ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On considère l'application $f : \mathbb{C}_n[X] \to \mathbb{C}_n[X]$ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le polynôme $f(P)$ tel que $f(P)(X) = X\ P' - P$

1. Montrez que f est linéaire.
2. Déterminez $\mathsf{Ker}\, f$ et $\mathsf{Im}\, f$.

Exercice 5 : Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f : E \to E$ qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme $f(P)$ tel que $f(P)(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

1. Montrez que f est linéaire.
2. Déterminez son noyau et son image.

Exercice 6 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\varphi : E \to E$ l'application définie par $\forall y \in E$,

$$\varphi(y) = y'' - 4y' + 3y$$

1. Montrez que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminez son noyau. φ est-il injectif ?

Exercice 7 : Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'application définie sur E qui à toute fonction $f \in E$ associe la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt$$

1. Montrez que φ est un endomorphisme de E.
2. Est-il injectif, surjectif ?

Formes linéaires

Exercice 8 : Trace d'une matrice
Etant donnée une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la **trace de A** comme la somme des éléments diagonaux de A :

$$\mathsf{Tr}\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Montrez que l'application $\mathsf{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Démontrez que pour toutes matrices carrées A et B d'ordre n, on a : $\mathsf{Tr}\,(A \times B) = \mathsf{Tr}\,(B \times A)$.
3. En déduire qu'il n'existe pas de matrices A et B telles que $A \times B - B \times A = I_n$

Exercice 9 : Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On définit $J : E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall f \in E, \quad J(f) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Montrez que J est une forme linéaire sur E.

Exercice 10 : Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'application appelée *fonctionnelle* de Dirac $\delta : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$

1. Montrez que δ est une forme linéaire sur E.
2. Les sous-ensembles $\{f \in E \mid f(0) = 0\}$, $\{f \in E \mid f(0) = 1\}$ de E sont-ils des sous-espaces vectoriels de E ?

Exercice 11 : Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit $F = \{P \in E \mid P(1) = P'(2) = 0\}$. Montrez que F est un sous-espace vectoriel de E et donnez-en une base.

Exercice 12 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel tel que pour tout $\vec{x} \in E$, la famille $\big(\vec{x}, f(\vec{x})\big)$ est liée.
Montrez que f est l'application nulle ou une homothétie vectorielle.

Isomorphismes et automorphismes

Exercice 13 : Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère $T : E \to E$ l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(X+1)$. Montrez que T est un automorphisme de E.

Exercice 14 : Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ un entier naturel non nul et $D : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application qui à tout polynôme associe son polynôme dérivé.

1. Montrez que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Considérons l'application Γ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par
$$\Gamma = Id_{\mathbb{R}[X]} + D + D^2 + \cdots + D^n.$$
Montrez que Γ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminez son isomorphisme réciproque.

Exercice 15 : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in L(E)$ un endomorphisme de E vérifiant
$$f^2 - 3f + 2Id_E = 0_{L(E)}$$

1. Montrez que f est un automorphisme et exprimez f^{-1} comme polynôme de f.
2. Montrez que $\mathsf{Ker}\,(f - Id)$ et $\mathsf{Ker}\,(f - 2Id)$ sont des sev supplémentaires de E :
$$E = \mathsf{Ker}\,(f - Id) \oplus \mathsf{Ker}\,(f - 2Id)$$

Projecteurs et symétries

Exercice 16 : Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad p(x, y) = (4x - 6y, 2x - 3y)$$

1. Montrez que p est linéaire.
2. Calculez $p \circ p$. En déduire que p est un projecteur.
3. Déterminez une base de $\mathsf{Ker}\,p$ et de $\mathsf{Im}\,p$.

Exercice 17 : Soit $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. On considère l'application $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par :
$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(\vec{x}) = \vec{x} - (x_1 + x_2 + x_3) \cdot \vec{v}$$

1. Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Démontrez que Φ est un projecteur.
3. Précisez les éléments caractéristiques de Φ.

Exercice 18 : Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrez que $p + q$ est un projecteur *si et seulement si* $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Supposons que $p + q$ soit un projecteur, montrez que
$$\mathsf{Ker}\,p + q = \mathsf{Ker}\,p \cap \mathsf{Ker}\,q \quad \text{et} \quad \mathsf{Im}\,p + q = \mathsf{Im}\,p \oplus \mathsf{Im}\,q.$$

Endomorphismes

Exercice 19 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant pour un entier $p \in \mathbb{N}^\star$
$$f^p = 0 \quad \text{et} \quad f^{p-1} \neq 0.$$
Montrez qu'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ tel que la famille $\{\vec{x}, f(\vec{x}), \ldots, f^{p-1}(\vec{x})\}$ soit libre.

Exercice 20 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant la relation $f^3 = -f$. Montrez que
$$E = \mathsf{Ker}\,f \oplus \mathsf{Im}\,f.$$

Exercice 21 : Soient f et g deux endomorphismes d 'un espace vectoriel E qui commutent. Montrez que $\mathsf{Im}\,f$ et $\mathsf{Ker}\,f$ sont stables par g.

Exercice 22 : Soient f et g deux endomorphismes d 'un espace vectoriel E.

1. Comparez $\mathsf{Ker}\,f \cap \mathsf{Ker}\,g$ et $\mathsf{Ker}\,(f+g)$, $\mathsf{Im}\,(f+g)$ et $\mathsf{Im}\,f + \mathsf{Im}\,g$.
2. Comparez $\mathsf{Ker}\,f$ et $\mathsf{Ker}\,f^2$, $\mathsf{Im}\,f$ et $\mathsf{Im}\,f^2$.

Exercice 23 : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. Montrez que
$$\mathsf{Im}\,f \cap \mathsf{Ker}\,f = \{\vec{0}_E\} \iff \mathsf{Ker}\,f = \mathsf{Ker}\,f^2 \quad \text{et} \quad E = \mathsf{Im}\,f + \mathsf{Ker}\,f \iff \mathsf{Im}\,f = \mathsf{Im}\,f^2$$

Miscellaneous

Exercice 24 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in L_{\mathbb{K}}(E)$ un endomorphisme de E vérifiant la relation
$$f^3 + 2f^2 - f - 2Id_E = 0.$$
Démontrez que pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe un triplet $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, unique tel que
$$\begin{cases} \bullet \quad \vec{a} \in \mathsf{Ker}\,(f - Id_E) \\ \bullet \quad \vec{b} \in \mathsf{Ker}\,(f + Id_E) \\ \bullet \quad \vec{c} \in \mathsf{Ker}\,(f + 2Id_E) \\ \bullet \quad \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{cases}$$
On notera : $\qquad E = \mathsf{Ker}\,(f - Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(f + Id_E) \oplus \mathsf{Ker}\,(f + 2Id_E)$