Polynômes à une indéterminée

Opérations dans $\mathbf{K}[X]$

Exercice 1 : Déterminez les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants :

1. $P_1 = X^3 - X \times (X - 2 + i)^2$
2. $P_3 = \prod_{k=0}^{n} (2X - k)$
3. $P_2 = (X - 2)^n - (X + 5)^n$
4. $P_4 = \prod_{k=0}^{n} (X - 6)^k$

Exercice 2 : Résolvez les équations d'inconnue $P \in \mathbf{K}[X]$ suivantes :

1. $P'^2 = 4P$,
2. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.
3. $P(X^2) = (X^2 + 1) \times P(X)$

Indication : raisonner par analyse-synthèse et commencer par examiner le degré d'une solution au problème posé.

Exercice 3 : Simplifiez le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (1 - X)^{3n-2k} X^k$

Divisibilité

Exercice 4 : Effectuez les divisions euclidiennes de A par B lorsque

1. $A = 1 + 6X^2 + 4X^3 - 5X^4$ et $B = X^2 - 5X + 3$,
2. $A = X^3 + iX^2 + X$ et $B = X - i + 1$.

Exercice 5 : Déterminez les restes dans la division euclidienne de $A = X^n + 2X - 2$ par B lorsque :
$B = (X - 2)$, $B = (X - 2)(X - 3)$, $B = (X - 2)^2$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminez le reste et le quotient de A par B, lorsque

1. $A = X^n + X^{n-1} + X + 1$ et $B = (X - 1)^2$;
2. $A = (X - 1)^n + (X + 2)^n + 2$ et $B = (X - 1)^n$.

Exercice 7 : Soit $P \in \mathbf{K}[X]$.

1. Soit $(a, b) \in \mathbf{K}^2$ tel que $a \neq b$. Exprimez à l'aide de $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
2. Soit $a \in \mathbf{K}$. Exprimez à l'aide de $P(a)$ et $P'(a)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice 8 : Résolvez les équations d'inconnue $P \in \mathbf{K}[X]$ suivantes :

1. $P'^2 = 4P$,
2. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 9 : Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrez que $P(X + 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$.

Arithmétique des polynômes

Exercice 10 : Déterminez le PGCD de $A = X^4 - 3X^2 - 4$ et de $B = X^3 + 2X^2 - X - 2$.

Exercice 11 : Soit $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$.

1. Déterminez un couple $(U_0, V_0) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $AU_0 + BV_0 = 1$.
2. Résolvez dans $\mathbf{K}[X]^2$ l'équation $AU + BV = 1$.

Exercice 12 : Soit $(n, m) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}^\star$.

1. Déduisez de la division euclidienne de n par m, celle de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
2. Démontrez que $PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1$.

Racines

Exercice 13 : Déterminez l'ordre de multiplicité de la racine α du polynôme P lorsque :

1. $\alpha = 2$ et $P = X^6 - 7X^5 + 17X^4 - 16X^3 + 8X^2 - 16X + 16$
2. $\alpha = 1$ et $P = X^{n+1} - (n + 1)X + n$

Exercice 14 :
1. Factorisez dans $\mathbf{C}[X]$ le polynôme $Q = X^2 + X + 1$.
2. Soient m, n, p trois entiers naturels. Démontrez que Q divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.
3. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n le polynôme $X^{3n} + X^2 + 1$ est-il divisible par Q ?

■ Factorisations et équations algébriques

Exercice 15 : Décomposez en produits de polynômes irréductibles dans $\mathbf{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $P = X^5 - 1$,
2. $P_1 = X^6 + 1$,
3. $P_2 = X^9 + X^6 + X^3 + 1$,
4. $P_3 = (1 - X^2)^3 + 8X^3$
5. $P_4 = X^8 - 2X^4 \cos 2\alpha + 1$

Exercice 16 : Déterminez les racines complexes de $(X-1)^n - 1$. En déduire la valeur de $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n)$

Exercice 17 : Soit $P = X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1 \in \mathbf{C}[X]$

1. Vérifiez que 1 et -1 sont racines de P. Précisez les multiplicités respectives α et β de 1 et -1.
2. En déduire une première factorisation :
$$P = (X-1)^\alpha \times (X+1)^\beta \times P_1$$
où P_1 est un polynôme vérifiant $P_1(1) \neq 0$ et $P_1(-1) \neq 0$ que vous déterminerez.
3. Vérifiez que $\forall z \in \mathbf{C}^\star$ $\tilde{P}_1(z) = 0$ *si et seulement si* $Z = z + \dfrac{1}{z}$ est racine d'une équation de degré 2 à préciser.
4. En déduire la factorisation de P en produits d'irréductibles.

Exercice 18 : Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré n supérieur ou égal à 2.

1. On suppose que P admet n racines distinctes. Montrez que P' est scindé et admet exactement $n-1$ racines distinctes.
2. On suppose que P est scindé. Montrez que P' est scindé.

■ Racines et coefficients

Exercice 19 : Déterminez une condition nécessaire et suffisante sur le paramètre $\lambda \in \mathbf{C}$ pour que le polynôme $P = X^3 - 7X + \lambda$ admette une racine qui soit le double de l'autre.

Exercice 20 : Résolvez l'équation $x^3 - 8x^2 + 23x - 28 = 0$ sachant que la somme de deux de ses racines est égale à la troisième.

Exercice 21 : Résolvez les systèmes d'équations *non linéaires* d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbf{C}^3$

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + xz + yz = -5 \\ x \times y \times z = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 1/x + 1/y + 1/z = 1 \\ x \times y \times z = -4 \end{cases}$$

■ Familles de polynômes

Exercice 22 : Polynômes d'interpolation de Lagrange
Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$ deux à deux distincts.On définit pour tout $i \in [\![0, n]\!]$

$$L_i = \frac{\displaystyle\prod_{j;\, j\neq i} (X - a_j)}{\displaystyle\prod_{j;\, j\neq i} (a_i - a_j)}$$

1. Observez que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
Notation : le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.
2. Montrez que pour tout $P \in \mathbf{K}_n[X]$, on a :
$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i(X)$$

Exercice 23 : Polynômes de Fibonacci
Soit $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de polynômes définie par les relations :

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ P_{n+2} = XP_{n+1} - P_n$$

1. Montrez que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $P_{n+1}^2 = 1 + P_n P_{n+2}$.
2. Déduisez-en que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, P_n et P_{n+1} sont premiers entre eux.
3. Montrez que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a
$$P_{m+n} = P_n P_{m+1} - P_{n-1} P_m$$
4. Montrez que pour tout $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, on a
$$PGCD(P_{m+n}, P_n) = PGCD(P_n, P_m)$$
En déduire que $PGCD(P_m, P_n) = PGCD(P_n, P_r)$, où r est le reste de la division euclidienne de m par n.
5. Concluez que $PGCD(P_n, P_m) = P_{n\wedge m}$.

Correction des exercices

Exercice 2 .—

1. Suivant l'indication fournie, raisonnons par **Analyse-Synthèse** :

   ■**Analyse :** supposons que $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifie $[P'(X)]^2 = 4P(X)$ et notons n le degré de P. Les propriétés algébriques sur le degré des polynômes (citepropositiond(P+Q)) nous conduisent à la discussion suivante :

   - si $n \leq 0$, alors P' est le polynôme nul et dans ce cas $P = 0$;
   - si $n > 0$, l'égalité $[P'(X)]^2 = 4P(X)$ entraîne que $2(n-1) = n$, soit encore $n = 2$.

   Ainsi, si P vérifie $[P'(X)]^2 = 4P(X)$, alors P est le polynôme nul, ou bien de degré 2. En particulier, P s'écrit sous la forme $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$.

   ■**Synthèse :** soit $P(X) = aX^2 + bX + c$, avec $(a, b, c) \in \mathbf{K}^3$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. En ce cas ,

$$\begin{array}{r||rcr} 4\times & P(X) & = & aX^2 + bX + c \\ & P'(X) & = & 2aX + b \\ 1\times & [P'(X)]^2 & = & 4a^2 + 4abX + b^2 \end{array}$$

   Par identification des coefficients, il s'ensuit que

$$[P'(X)]^2 = 4P(X) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4a^2 & = & 4a \\ 4b & = & 4ab \\ 4c & = & b^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \text{ et } c = b^2/4 \\ OU \\ a = 0 \text{ et } c = b = 0 \end{array} \right.$$

   ■**Conclusion :** finalement, les polynômes $P \in \mathbf{K}[X]$ vérifiant $[P'(X)]^2 = 4P(X)$ sont le polynôme nul et les polynômes de la forme $P(X) = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$, où $b \in \mathbf{K}$.

2. la preuve sera par **Analyse-Synthèse :**

   ■**Analyse :** soit $P \in \mathbf{K}[X]$ une solution de l'équation $(X^2+1)P'' = 6P$. Notons n le degré de P. Alors

   - si $n \leq 1$, alors P'' est nul et donc P aussi ;
   - si $n \geq 2$, l'examen des degrés dans l'égalité $(X^2+1)P''(X) = 6P(X)$ n'entraîne *a priori* aucune relation pour n.

   Regardons alors les coefficients dominants :

$$\begin{array}{r||rcl} 6\times & P(X) & = & a_n X^n + \textit{ termes de degrés inférieurs, } \text{ avec } a_n \neq 0 \\ & P'(X) & = & n\, a_n X^{n-1} + \cdots \\ (X^2+1)\times & P''(X) & = & n(n-1)a_n X^{n-2} + \cdots \end{array}$$

   En identifiant les coefficients dominants, il en résulte que nécessairement $n(n-1) = 6$, ce qui entraîne $n = 3$.

   Ainsi, si P vérifie $(X^2+1)P''(X) = 6P(X)$, alors P est de degré inférieur ou égal à 3.

   ■**Synthèse :** soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, $(a, b, c, d) \in \mathbf{K}^4$ un polynôme de degré inférieur ou égal à 3. Alors

$$\begin{array}{rcl} (X^2+1)P''(X) & = & (X^2+1)(6aX + 2b) = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + b \\ 6P(X) & = & 6aX^3 + 6bX^2 + 6cX + 6d \end{array}$$

   Par identification des coefficients, il s'ensuit que

$$(1+X^2)P''(X) = 6P(X) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 6a & = & 6a \\ 6b & = & 2b \\ 6c & = & 6a \\ 6d & = & 2b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & c \\ b & = & 0 \\ d & = & 0 \end{array} \right.$$

   ■**Conclusion :** finalement, les solutions du problème posé sont les polynômes de la forme $P(X) = a(X^3 + X)$, où $a \in \mathbf{K}$. ▲