# Dérivation (II)

## Théorème de Rolle

**Exercice 1 :** Soit $n \in \mathbf{N}$ et $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de $I$.

1. Montrez que la dérivée $n$ ième de $f$ s'annule au moins une fois sur $I$.
2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ un réel. Montrez que la dérivée $n-1$ de $f' + \alpha f$ s'annule au moins une fois sur $I$.

**Exercice 2 : Généralisations du théorème de Rolle**

1. Soit $f : [0, +\infty[ \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(0).$$
Montrez qu'il existe $c \in ]0, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$
Montrez qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

**Exercice 3 :** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ , $(a, b) \in \mathbf{R}^2$, avec $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction $n$ fois dérivable. On suppose que
$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0.$$
Montrez qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

## Théorèmes des accroissements finis

**Exercice 4 : Constante d'Euler**

1. Démontrez que $\forall k \in \mathbf{N}^\star$, $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$
2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Déterminez un encadrement de $S_n$.
3. Montrez que la suite $(S_n)$ est convergente. Sa limite $\gamma$ est appelée constante d'Euler.

**Exercice 5 :** Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Montrez que $f$ est lipschitzienne.
2. On suppose que $\forall x \in [a, b]$, $|f'(x)| < 1$. Montrez que $f$ est strictement contractante.

**Exercice 6 : Théorèmes des accroissements finis généralisé**
Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables dans $]a, b[$.

1. Montrez que
$$\exists c \in ]a, b[, \quad f'(c)\big[g(b) - g(a)\big] = g'(c)\big[f(b) - f(a)\big]$$
2. Montrez que
$$\text{si } \forall x \in ]a, b[,\ |f'(x)| \leq g'(x), \text{ alors } |f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

**Exercice 7 : Règle de L'Hopital**
Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables dans $]a, b[$.

1. Soit $x_0 \in ]a, b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. On suppose que $g'$ ne s'annule pas dans $]a, b[ \setminus \{x_0\}$. Montrez que
$$\forall \ell \in \mathbf{R}, \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$
**Indication :** vous pourrez utiliser le théorème des accroissements finis généralisés.
2. Appliquez cette règle pour déterminer les limites suivantes
$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

## Convexité

**Exercice 8 :** Soient $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ deux fonctions. On suppose que $f$ est convexe et que $g$ est convexe et croissante. Montrez que $g \circ f$ est convexe.

**Exercice 9 :** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1. on suppose que $f$ est strictement croissante. Etudiez $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
2. On suppose que $f$ est bornée. Montrez que $f$ est constante.

**Exercice 10 :** Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrez que $f$ est positive.
2. On suppose que $f$ présente une asymptote en $+\infty$. Etudiez la position de $\Gamma_f$ par rapport à cette droite.

## ■ Inégalités

**Exercice 11 :** Soient $p$ et $q$ deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $(a,b)\in \mathbf{R}^{+\star}\times\mathbf{R}^{+\star}$. Montrez que

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

**Exercice 12 :** Soit $f : ]1,+\infty[ \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = -\ln\ln x$.

1. Montrez que $f$ est convexe.
2. En déduire que pour tout $(a,b)\in\mathbf{R}$, avec $a,b>1$, on a

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a\ \ln b}$$

**Exercice 13 :**

1. Montrez que $x\mapsto -\ln x$ est convexe.
2. A l'aide de l'inégalité de Jensen montrez que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des nombres réels strictement positifs, alors

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

**Exercice 14 :** Démontrez que

1. $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$
2. $\forall x\in ]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\quad |\tan x| \geq |x|.$
3. $\forall x\in ]-1,+\infty[,\quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x.$
4. $\forall x\in\mathbf{R}^+,\qquad e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$
5. $\forall x\in [0,+\infty[, x^{n+1}-(n+1)x+n \geq 0$

## ■ Miscellaneous

**Exercice 15 :**

1. Trouvez toutes les fonctions $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, dérivables en 0 et telles que

$$\forall x\in\mathbf{R},\ f(2x) = 2f(x)$$

2. Trouvez toutes les fonctions $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, dérivables en 0 et telles que

$$\forall x\in\mathbf{R},\ f(2x) = \big[f(x)\big]^2$$

**Exercice 16 :** Soit $f$ une fonction dérivable dans $I=[0,+\infty[$.

1. (a) Soit $\ell\in\mathbf{R}$. Montrez que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \ell$.
   (b) Soit $g$ la fonction définie dans $I$ par $g(x) = x+\sin x$.
   Etudiez $\lim_{x\to+\infty} g'(x)$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}$. Conclusion ?
2. Montrez que si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$, alors $\Gamma_f$ présente une branche parabolique de direction $(Oy)$.

# Correction des exercices

**Exercice 1 .—** 1. On montre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$

$\mathcal{P}_n$ toute fonction de classe $\mathcal{C}^n$ qui s'annule $n+1$ fois a sa dérivée $n$ ième qui s'annule.

- **Init.** lorsque $n=0$, le résultat est trivial, lorsque $n=1$, on reconnaît le pur théorème de Rolle.
- **Héréd.** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On suppose que $f$ s'annule en $n+2$ points distincts de l'intervalle $I$ :

  $$a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+2}$$

  Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$, on applique alors le **Théorème de Rolle** entre $a_k$ et $a_{k+1}$ : $f$ est continue sur $[a_k, a_{k+1}]$, dérivable à l'intérieur, comme $f(a_k) = f(a_{k+1}) (= 0)$ il en résulte l'existence d'un réel $b_k \in ]a_k, a_{k+1}[$ tel que $f'(b_k) = 0$.
  Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, n+1[$, il en résulte que $f'$ s'annule $n+1$ fois dans l'intervalle $I$. Comme $f$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, $f' \in \mathcal{C}^n$ et l'hypothèse de récurrence permet d'en déduire que la dérivée $n$ ième de $f'$ s'annule, ce qui revient précisément à dire que la dérivée $n+1$ ième de $f$ sannule dans $I$.
- par récurrence, on a bien montré que pvraie.our tout entier $n \in \mathbf{N}$, $\mathcal{P}_n$ est

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^\star$, $f : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ qui s'annule en $n+1$ points distincts de $I$.
   On définit pour $x \in I$, $h(x) = f(x)e^{\alpha x}$. $h$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et s'annule aussi en $n+1$ points distincts de $I$. En appliquant le theorème drôle entre deux valeurs d'annulation consécutives de $h$, il en résulte que $h'$ s'annule au moins $n-1$ fois dans $I$. Or pour tout $x \in I$,

   $$h'(x) = \left[f'(x) + \alpha f(x)\right] e^{\alpha x}$$

   Comme pour tout $x \in I$ $e^{\alpha x} > 0$, ceci revient à dire que la fonction $x \mapsto f'(x) + \alpha f(x)$ s'annule au moins $n-1$ fois. ▲

**Exercice 2 .—** 1. Pour bien commencer l'exo, faites un petit schéma et rappelez-vous de la démonstration du théorème de Rolle. Elle repose sur l'existence d'un extremum (global) à l'intérieur de l'intervalle de définition de la fonction. Dans cet énoncé, la fonction n'est plus définie sur un segment mais sur un intervalle fermé non majoré, mais possède une limite à l'infini. Cette hypothèse permet d'en déduire l'existence d'un extremum global (voyez votre schéma) et de conclure comme dans la preuve rigolote. Donc on peut démontrer cet exo en imitant la preuve du théorème de Rolle.
Mais on peut aussi, créer les conditions pour appliquer Rolle, c'est-à-dire en se ramenant au cas d'une fonction définie et continue sur un segment. Pour cela, considérons la fonction

$h : [0,1[ \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in [0,1[$ : $h(x) = f(\mathrm{Argth}(x))$

**Nb :** ici on utilisera que Argth réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ sur $\mathbf{R}^+$.

La fonction $h$ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de telles fonctions et pour tout $x \in ]0,1[$, on a

$$h'(x) = \frac{f'(\mathrm{Argth}(x))}{1-x^2}$$

De plus, par changment de variable, on montre aisément que

$$\lim_{x \to 1} h(x) = f(0)$$

Ainsi $h$ se prolonge continument en 1, en posant $h(1) = f(0)$. On note encore $h : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction ainsi prolongée. On a alors :
$h : [0,1] \to \mathbf{R}$ est continue dans $[0,1]$ dérivable dans l'intérieur. Comme de plus $h(0) = f(\mathrm{Argth}(0)) = f(0)$ et $h(1) = f(0)$, le **Théorème de Rolle** permet d'en déduire l'existence d'un réel $\alpha \in ]0,1[$ tel que $h'(\alpha) = 0$. ie :

$$0 = \frac{f'(\mathrm{Argth}(\alpha))}{1-\alpha^2}$$

Comme $\alpha \in ]0,1[$, ceci entraîne que $f'(\mathrm{Argth}(\alpha)) = 0$. Le réel $c = \mathrm{Argth}(\alpha)$ convient.

2. Fais un dessin. Dans ce cas, il parait plus rapide de modifier la preuve drole : on observe graphiquement que la fonction $f$ admet un minimum absolu. En ce point la dérivée de $f$ doit s'annuler d'après la **condition nécessaire d'extrémailité du premier ordre**. Voici les détails :

   - notons $A = |f(0)| + 1$. Comme par hypothèse $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} = +\infty$, il existe $B \in \mathbf{R}^+$ tel que

     $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |x| \geq B \Rightarrow f(x) \geq A$$

     ainsi, à l'extérieur du segment $[-B, B]$, les valeurs de $f$ sont grandes, en

- dans le segment $[-B,B]$, nous appliquons le **Théorème image continue d'un segment** : la fonction $f_| : [-B,B] \to \mathbf{R}$ est continue sur un segment elle est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier il existe $c \in [-B,B]$ tel que

$$\forall x \in [-B,B], f(x) \geq f(c)$$

- en fait $f(x)$ est le minimum absolu de $f$ sur $\mathbf{R}$ en effet,
  - ▷ si $x \in [-B,B], f(x) \geq f(c)$
    en particulier $f(0) \geq f(c)$
  - ▷ si $x \notin [-B,B], f(x) \geq f(0) \geq f(c)$
- comme $f$ est dérivable dans $\mathbf{R}$, la **condition nécessaire d'extrémailité du premier ordre**, entraîne que $f'(c) = 0$.

▲

**Exercice 3 .—** encore un gag à répétition ou une cascade de Rolle !
La preuve par récurrence. ▲

**Exercice 4 .—** 1. on utilise l'inégalité de convexité :

$$\forall x > -1, \ \ln(1+x) \leq x$$

Soit $k \in [\![1,n]\!]$ on a directement

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

D'autre part, $\dfrac{-1}{k+1} > -1$ et par conséquent

$$\ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right) \leq \frac{-1}{k+1}$$

Passant aux opposés, il en résulte at once que

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \geq \frac{1}{k+1}$$

2. Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. En sommant les inégalités obtenues ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &\geq \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&\geq \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1) \\
&\geq \ln(n) \\
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\
&\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&\leq 1 + \ln(n)
\end{aligned}$$

Il en résulte finalement, l'encadrement

$$0 \leq S_n \leq 1$$

3. Sachant que la suite $(S_n)$ est bornée, pour en déduire qu'elle est convergente, on pense forcément à la **Li-Mo**. Étudions donc la monotonie de la suite. Soit $n \in \mathbf{N}$. On a

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Finalement, la suite $(S_n)$ est décroissante et bornée. Donc **Li-Mo**-convergente. On note $\gamma$ sa limite. On note :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o_\infty(1)$$

où $o_\infty(1)$ est une suite qui tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$. ▲

**Exercice 5 .—** c'est du cours ! *TAF it !*

**Exercice 6 .—** Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables dans $]a,b[$.

1. soit $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in [a,b], \quad h(x) = f(x)\big[g(b) - g(a)\big] - g(x)\big[f(b) - f(a)\big]$$

Quelles sont donc les bonnes propriétés de $h$ ? ?

(a) $h$ est continue dans $[a,b]$ dérivable dans l'intérieur comme combinaison linéaire de telles fonctions. En particulier, pour tout $x \in ]a,b[$

$$h'(x) = f'(x)\big[g(b) - g(a)\big] - g'(x)\big[f(b) - f(a)\big]$$

(b) $h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$ et $h(b) = -f(b)g(a) + g(b)f(a)$

Ainsi, $h$ est continue dans $[a,b]$ dérivable dans l'intérieur et $h(a) = h(b)$ . Par le théorème de Rolle ( oui je sais à force c'est plus drôle mais je peux pas m'empêcher ☺), il en résulte l'existence d'un $c \in ]a,b[$ tel que $0 = h'(c)$, ce qui se traduit par

$$f'(c)\big[g(b) - g(a)\big] = g'(c)\big[f(b) - f(a)\big]$$

2. La deuxième assertion est prouvé dans le cours, il s'agit d'étudier la monotonie des fonctions $f-g$ et $f+g$. ▲

**Exercice 7 .—** 1. Soit $x \in ]a,b[\backslash\{x_0\}$. On applique le TAF (généralisé) entre $x_0$ et $x$. Il en résulte l'existence d'un réel $c_x \in ]x_0, x[\cup]x, x_0[$ [1] tel que

$$\big[f(x)-f(x_0)\big]g'(c_x) = \big[g(x)-g(x_0)\big]f'(c_x)$$

Comme par hypothèse $g'$ ne s'annule pas en dehors de $x_0$, $g(x)$ est nécessairement non nul (sinon, cela contredit le thèorème de Rolle). En divisant les deux membres de l'égalité c-dessus par $g(x)$, il vient

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Finalement, on conclut à l'aide d'un changement de variable :

- $y(x) = c_x \xrightarrow[x\to x_0]{} x_0($ par encadrement$)$
- $\dfrac{f'(y)}{g'(y)} \xrightarrow[y\to x_0]{} \ell($ par hypothèse$)$

Par composition, il en résulte que $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$

2. En pratique, la règle de L'Hôpital est utile pour lever les indéterminations
   (a) $\dfrac{1-\cos(x)}{3x^2} \sim_0 \dfrac{x^2}{6x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{6}$. D'après de *L'Hôpital's Rule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.
   (b) $\dfrac{-x}{2x(1+x)} \sim -\dfrac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. ▲

**Exercice 8 .—** On montre que $g\circ f$ vérifie l'**inégalité des cordes**.
Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$, $\lambda\in[0,1]$, comme $f$ est convexe, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Par croissance et convexité de $g$, il en résulte que

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\lambda x+(1-\lambda)y) &\leq g\left(f(x)+(1-\lambda)f(y)\right)\\ &\leq \lambda(g\circ f)(x)+(1-\lambda)(g\circ f)(y)\end{aligned}$$

Ainsi, $(g\circ f)$ vérifie les cordes, elle est donc convexe. ▲

**Exercice 9 .—** Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ une fonction convexe.

[1] je ne sais pas dans quel ordre sont rangés $x$ et $x_0$

1. on suppose que $f$ est strictement croissante. Un petit schéma suffit à se convaincre que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Pour le prouver, on va raisonner par comparaison. Soit $x\in\mathbf{R}$, $x>1$. Comme $f$ est convexe, ses pentes sont croissantes. En particulier, $\varphi_0(x)\geq\varphi(1)$, c'est-à-dire que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \geq \frac{f(1)-f(0)}{1-0}$$

Posons $a = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}$. Comme $f$ est strictement croissante $a>0$. Par comptibilité, ordre et multiplication, il s'ensuit que

$$\forall x>1,\quad f(x)\geq f(0)+ax$$

Le résultat voulu en découle par comparaison. ▲

2. Soit $(a,b)\in\mathbf{R}^2$ tel que $a<b$. On montre par l'absurde que $f(a)=f(b)$. Supposons au contraire que $f(a)\neq f(b)$. Deux cas se présentent :
   ▷ si $f(b)-f(a)>0$. On a pour tout $x>b$ (croissance des pentes en $a$)

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

   D'où l'on tire que

$$\forall x>b,\quad f(x)\geq f(a)+(x-a)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

   Ce qui contredit le fait que $f$ est majorée au voisinage de $+\infty$.
   ▷ Si $f(b)-f(a)<0$. On a pour tout $x<a$ (croissance des pentes en $b$)

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b} \leq \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

   D'où l'on tire que

$$\forall x<b,\quad f(x)\geq f(b)+(x-b)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

   Ce qui contredit le fait que $f$ est majorée au voisinage de $-\infty$. ▲

**Exercice 10 .—** 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$. Soit $a\in\mathbf{R}$. On montre par l'absurde que $f(a)\geq 0$. Sinon, $f(a)<0$. Comme par hypothèse, $f$ tend vers 0 en $+\infty$, il existe $b\in\mathbf{R}$ tel que

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad \left(x\geq b \Rightarrow f(x)\geq \frac{1}{2}f(a)\right)$$

Soit $x \geq b$. on a alors par croissance des pentes mesurées au point $a$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq \frac{-f(a)}{2(b-a)}$$

D'où l'on tire que

$$\forall x > b, \quad f(x) \geq f(a) + (x-a)\cdot\frac{-f(a)}{2(b-a)}$$

Par comparaison, il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty} f = +\infty$, contrairement à l'hypothèse.

2. On suppose que $f$ présente une asymptote en $+\infty$. On note $y = ax+b$ une équation cartésienne de cette asymptote. La fonction affine $h : x \mapsto ax+b$ est concave (car une fnction affine est à la fois convexe et concave). En ce cas,la fonction $g = f - h$ est convexe comme somme de telles fonctions. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. D'après la première question, il s'ensuit que $g$ est positive, c'est-à-dire $\Gamma_f$ est au-dessus de son asymptote. ▲

**Exercice 11 .—** Posons $\lambda = 1/p$, de sorte que $1/q = 1-\lambda$. On applique l'inégalité des cordes à la fonction concave ln donne pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^{+\star}\times\mathbf{R}^{+\star}$

$$\ln\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x) + \frac{1}{q}\ln(y)$$

En prenant l'exponentielle il vient

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^{+\star}\times\mathbf{R}^{+\star}, \quad \frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y \geq x^{\frac{1}{p}} \times y^{\frac{1}{q}}$$

En particulier, avec $x = a^p$ et $y = b^q$ le résultat s'ensuit. ▲

**Exercice 12 .—** 1. $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in I$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln(\ln(x)) \\ f'(x) &= -\frac{1}{x\ln(x)} \\ f''(x) &= \frac{\ln(x)+1}{\left(x\ln(x)\right)^2} > 0 \end{aligned}$$

D'après la **caractérisation des fonctions convexes de classe** $\mathcal{C}^2$, $f$ est convexe sur $I$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbf{R}$, avec $a,b > 1$. Prenant $\lambda = \dfrac{1}{2}$, l'**inégalité des cordes** s'écrit $f(\lambda a + (1-\lambda b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)$, soit

$$\begin{aligned} \ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) &\geq \frac{1}{2}\ln\ln(a) + \frac{1}{2}\ln\ln(b) \\ &\geq \ln\left((\ln(a))^{1/2}\times(\ln(b))^{1/2}\right) \\ &\geq \ln\left(\sqrt{\ln a\,\ln b}\right) \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par croissance de l'exponentielle. ▲

**Exercice 13 .—** TROFAS !

1. ln est concave donc $-\ln$ est convexe.
2. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres strictement positifs. Prenons $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \dfrac{1}{n}$. L'**inégalité de Jensen** donne :

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) &\geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(x_k) \\ &\geq \ln\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\right) \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par croissance de l'exponentielle. ▲

**Exercice 14 .—** 1. Inégalités des cordes et des tangentes pour la fonction concave $\sin_|: [0, \frac{\pi}{2}]$.

2. Inégalité des tangentes en 0.
3. Inégalité des tangentes.
4. L'inégalité des tangentes montre seulement que $\forall x \in \mathbf{R}^+, \quad e^x \geq 1+x$. Pour avoir mieux, on peut utiliser le **Théorème des accroissements finis**. On pose $f = \exp$ et $g : x \mapsto 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$. Soit $x \in \mathbf{R}^+$. On a :
   (a) d'après l'inégalité des tangentes en 0, $f'(x) = e^x \geq 1 + x = g'(x)$.
   (b) Ainsi, $0 \leq g'(x) \leq f'(x)$. D'après le **TAF**, il en résulte que $|g(x)-g(0)| \leq f(x) - f(0)$, ce qui revient précisément à dire que

$$e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

5. inégalité des tangentes au point 1 pour la fonction convexe $x \mapsto x^{n+1}$. ▲