Correction des exercices

Exercice 1 .— on va faire une récurrence ...

- **Initialisation** Lorsque $n = 1$, on a $1 \times 3 \times 8 = 4 \times 6$ est divisible par 6.
- **Hérédité** soit $n \geq 0$ tel que $u_n = n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = 6N$. Montrons que u_{n+1} est divisible par 6 :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (n+1)(2n+3)(7n+8) = [n+1][(2n+1)+2][(7n+1)+7] \\ &= n(2n+1)(7n+1) + 42n^2 + 60n + 24 \\ &= 6 \times [N + 7n^2 + 10n + 4] \end{aligned}$$

- **Conclusion** par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$, $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. ▲

Exercice 2 .— La preuve sera par récurrence :

- **Initialisation** lorsque $n = 2$, on a $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. Or $\frac{5}{4} > \frac{6}{5} \iff 25 > 24$. Donc la propriété est vérifiée pour $n = 2$.
- **Hérédité** soit $n \geq 2$ tel que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &> \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \\ &> \frac{3n^3 + 6n^2 + 5n + 1}{(2n+1)^2(n+1)^2} \end{aligned}$$

On vérifie alors que $\dfrac{3n^3 + 6n^2 + 5n + 1}{(2n+1)^2(n+1)^2} \geq \dfrac{3n+3}{2n+3}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{3n^3 + 6n^2 + 5n + 1}{(2n+1)^2(n+1)^2} - \frac{3n+3}{2n+3} &= \frac{6n^4 + 21n^3 + 28n^2 + 17n + 3}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2} \\ &\quad - \frac{6n^4 + 21n^3 + 27n^2 + 15n + 3}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2} \\ &= \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Par transitivité de la relation d'ordre, il s'ensuit que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n+3}{2n+3}$$

- **Conclusion** par récurrence, on a montré que pour tout entier $n \geq 2$, $1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} > \dfrac{3n}{2n+1}$. ▲

Exercice 3 .— Par récurrence.

- **Init.** pour $n = 1$, on a $1!3! = 64 = \geq 2^2$.
- **Hér.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que $1!\,3! \cdots (2n+1)! \geq \big[(n+1)!\big]^{n+1}$. Alors

$$\begin{aligned} 1!\,3! \cdots (2n+1)!\,(2n+3)! &\geq \big[(n+1)!\big]^{n+1} \times (2n+3)! \\ &\geq \Big[\frac{(n+2)!}{n+2}\Big]^{n+1} \times (2n+3)! \\ &\geq \big[(n+2)!\big]^{n+1} \times \prod_{k=1}^{n+2} k \times \frac{\prod_{k=n+3}^{2n+3} k}{(n+2)^{n+1}} \\ &\geq \big[(n+2)!\big]^{n+2} \times \frac{\prod_{k=n+3}^{2n+3} (n+2)}{(n+2)^{n+1}} \\ &\geq \big[(n+2)!\big]^{n+2} \end{aligned}$$

- **Ccl.** Par récurrence, on a montré $\forall n \in \mathbf{N}^\star, 1!\,3! \cdots (2n+1)! \geq \big[(n+1)!\big]^{n+1}$. ▲

Exercice 4 .— On commence par vérifier cette propriété lorsq $n = 2$. Il s'agit de montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ de réels supérieurs ou égaux à 1, on a

$$2(ab+1) \geq (a+1)(b+1)$$

. Raisonnons par équivalences, on a :

$$2(ab+1) \geq (a+1)(b+1) \quad \iff \quad ab - a - b + 1 \geq 0 \iff (a-1)(b-1) \geq 0$$

Comme a et b sont supérieurs à 1 cette dernière inégalité est bien satisfaite.
A présent montrons la propriété par récurrence.

- **Init.** lorsque $n = 1$, il n'y a rien à faire !

- **Héréd.** Soit $n \geq 1$ un entier tel que pour tout n-uplet de nombres réels $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, tous supéieurs ou égaux à 1, on a :

$$2^{n-1}(a_1 \times \cdots \times a_n + 1) \geq (a_1 + 1) \times \cdots \times (a_n + 1).$$

Soit alors $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ un $n+1$ uplet de réels, tous supérieurs ou égaux à 1. Alors en posant $B_0 = b_0 \geq 1$ et $B_1 = b_1 \cdots \times b_n \geq 1$, et en appliquant la remarque préliminaire, il vient :

$$\begin{aligned} 2^n\,(b_0 \times b_1 \cdots \times b_n + 1) &= 2^{n-1}(1+B_0)(1+B_1) \\ &= (1+b_0) \times 2^{n-1}\,(b_1 \cdots \times b_n + 1) \end{aligned}$$

On conclut alors à l'aide de l'hypothèse de récurrence que

$$2^n\,(b_0 \times b_1 \cdots \times b_n + 1) \geq (1+b_0) \times (1+b_1) \times \cdots \times (1+b_n)$$

- **Ccl.** Par récurrence, on a montré que pour tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ de réels supérieurs ou égaux à 1, $2^{n-1}(a_1 \times \cdots \times a_n + 1) \geq (a_1+1) \times \cdots \times (a_n+1)$.▲

Exercice 5 .— Soit $f \in \mathscr{E}$.

1. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbf{N}$, que $f(\mathcal{D}_p) \subset \mathcal{D}_p$.
   (a) **Init.** Lorsque $p = 0$, la demi-droite $\mathcal{D}_0$ est $\mathbf{N}$. Or par définition, $f; \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, d'où $f(\mathcal{D}_0) \subset \mathcal{D}_0$.
   (b) **Hér.** soit $p \in \mathbf{N}$ tel que $f(\mathcal{D}_p) \subset \mathcal{D}_p$. On montre que $\mathcal{D}_{p+1}$ est stable par f.
   Soit $k \geq p+1$. Alors $k - 1 \geq p$. Par HR, il s'ensuit que $f(k-1) \geq p$, ce qui revien à dire que $f(k-1) \in \mathcal{D}_p$. Par HR, il en résulte finalement que $f \circ f(k-1) \geq p$. Finalement, comme $f \in \mathscr{E}$, il vient $f(k) > f \circ f(k-1) \geq p$. Par transitivité améliorée, on en déduit que $f(k) > p$, ce qui revient précisément à dire que $f(k) \geq p+1$.
   Ceci étant vrai pour tout $k \geq p+1$, on a bien établi la stabilité de $\mathcal{D}_p$ par f.
   (c) **Ccl.** Par récurrence, on a montré que pour tout entier $p \in \mathbf{N}$, $f(\mathscr{D}_p) \subset \mathscr{D}_p$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$. Appliquons le résultat précédent avec $p = f(n)$. On a donc $f(n) \in \mathcal{D}_p$ d'où l'on tire $f \circ f(n) \in \mathcal{D}_p$. Autrement dit $f \circ f(n) \geq f(n)$. Or, f étant dans $\mathscr{E}$, on a $f(n+1) > f \circ f(n)$. Par transitivité améliorée, il en résulte que
$$f(n+1) > f(n).$$
   Ceci étant vrai pour tout entier, il en résulte que $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est strictement croissante.
   Finalement, par stricte croissance de f, l'inégalité $f \circ f(n) < f(n+1)$, valide pour tout entier naturel n, entraîne que $f(n) < n+1$.
3. Pour conclure on utilise le fait suivant[1] :
   Si $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est un fonction strictement croissante, alors, pour tout entier naturel, $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

   Appliqué à notre fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, ce fait montre que pour tout entier $n \leq f(n) < n+1$, ce qui ne laisse d'autre possibilité que $f(n) = n$.
   Finalement, la seule fonction appartenant à $\mathscr{E}$ est la fonction identité ! ! ▲

Exercice 6 .— 1. il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité.
Unicité : Soit $n \in \mathbf{N}$. On considère $\big((p_1, q_1), (p_2, q_2)\big) \in \mathbf{N}^2 \times \mathbf{N}^2$ tels que

$$n = 2^{p_1}(2q_1 + 1) = 2^{p_2}(2q_2 + 1)$$

Supposons sans perte de généralité que $p_1 \geq p_2$. On a alors

$$2^{p_1 - p_2}(2q_1 + 1) = 2q_2 + 1$$

Clairement le membre de droite est impair, ceci entraîne que $p_1 - p_2$puis que $q_1 = q_2$.
Existence :
La démonstration sera par récurrence forte.
   (a) **Init.** Pour $n = 1$, on peut écrire $1 = 2^0 \times (2 \times 0 + 1)$. Le couple $(0, 0)$ convient.
   (b) **Hér.** Soit $n \in \mathbf{N}^\star$. On suppose que tout entier $m \in [\![1, n]\!]$, peut s'écrire sous la forme $m = 2^p(2q+1)$, où $(p, q) \in \mathbf{N}^2$. Montrons qu'il en va de même pour $n+1$. On discute suivant la parité de n.
      - si n est pair, alors $n+1$ est impair. Par conséquent, il existe $q \in \mathbf{N}$ telq que $n+1 = 2q+1$. En ce cas, le couple $(0, q)$ convient.
      - si n est impair, alors $n+1$ est pair. Par suite il existe $m \in [\![1, n]\!]$ tel que $n+1 = 2m$. Comme $m \in [\![1, n]\!]$, il s'écrit par HR sous la forme $m = 2^p(2q+1)$, où $(p, q) \in \mathbf{N}^2$. Dans ce cas, $n+1 = 2^{p+1}(2q+1)$: le couple $(p+1, q)$ convient.
      - dans tous les cas, on a bien démontré l'existence d'un couple d'entiers (P, Q) tel que $n+1 = 2^P(2Q+1)$.
   (c) **Ccl .** Par récurence, on a montré que tout entier $n \in \mathbf{N}^\star$ peut s'écrire sous la forme $n = 2^p(2q+1)$, où $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.
2. Soit $\Phi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par
$$\forall (p, q) \in \mathbf{N}^2,\ \Phi(p, q) = 2^p(2q+1) - 1$$
   D'après la question précédente, Φ réalise une bijection de $\mathbf{N}^2$ sur $\mathbf{N}$.
3. La projection $p : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ est clairement surjective mais pas injective.
   Si $\varphi : E \to F$ est un application entre deux ensembles de même cardinal fini, il y a équivalence entre φ surjective et φ injective. Mais cette propriété ne subsiste pas lorsque φ est définie entre deux ensemble équipotents mais de cardinal infini. ▲

[1] preuve par récurrence laissée aux bons soins du lecteur ...

Exercice 7 .— Soient E un ensemble de cardinal n, $A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties de E.

1. Le cardinal de $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$ est $2^n \times 2^n = 4^n$.
2. Pour que (A, B) vérifie $A \cap B = \emptyset$, il faut choisir B dans l'ensemble des parties du complémentaire de A. Pour compter le nombre de couples (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$, on discute suivant la valeur $k \in [\![0, n]\!]$ du cardinal de A :
   (a) je choisis une partie $A \in \mathscr{P}_k(E)$ $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités.
   (b) puis je choisis $B \in \mathscr{P}(E \setminus A)$ $\rightsquigarrow 2^{n-k}$ possibilités.

   Au total, il y a $\binom{n}{k}2^{n-k}$ façons différentes de construire un couple A, B de parties disjointes de E telles que $\mathsf{Card}\ A = k$.
   Finalement, le nombre de couples (A, B) de parties disjointes de E est

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

3. D'après les lois de Morgan, si (A, B) est un couple de parties de E tel que $A \cup B = E$, alors $(A', B') = (E \setminus A, E \setminus B)$ est un couple de parties disjointes de E et vice versa. Par suite, il y a autant de couples (A, B) est un couple de parties de E tel que $A \cup B = E$ que de couples de parties disjointes, à savoir 3^n.
4. On reconnaît ici la caractérisation du complémentaire :
   Pour construire un couple (A, B) tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$
   (a) je choisis une partie $A \in \mathscr{P}(E)$ $\rightsquigarrow 2^n$ possibilités.
   (b) puis je choisis $B = \complement_E(A)$ $\rightsquigarrow 1$ possibilités.

   Au final, il y a donc 2^n couples (A, B) de parties de E tels que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = E$. ▲

Exercice 8 .— 1. Si $n < p$, il n'existe pas de surjection de $\mathbb{F}_n$ sur $\mathbb{F}_p$. Si $n = p$, toute surjection de $\mathbb{F}_n$ sur $\mathbb{F}_p$ est automatiquement bijective : il y a donc $n!$ surjection de $\mathbb{F}_n$ dans lui-même. Enfin, lorsque $n \in \mathbf{N}^\star$ et $p = 1$, il n'y a qu'une application de $\mathbb{F}_n$ dans $\mathbb{F}_1$. Elle est surjective ! trop de la chance !!

2. Soit $n, p \in \mathbf{N}^\star$. Pour $k \in \mathbb{F}_p$, on note $A_k = \{f : \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_p \mid f$ est surjective, et $f(1) = k\}$.
   Soit $f \in A_k$. Alors 1 est un antécédent de k par f. Deux cas se présentent,
   - soit 1 est le seul antécédent de k par f. Dans ce cas, f induit par restriction une fonction surjective de $[\![2, n]\!]$ sur $\mathbb{F}_p \setminus \{k\}$.
   - soit 1 n'est pas le seul antécédent de k par f. Dans ce cas, f induit par restriction une fonction surjective de $[\![2, n]\!]$ sur $\mathbb{F}_p$.

   Ainsi, A_k est réunion disjointe de deux sous-ensembles :
   - A_{k1} est l'ensemble des fonctions de A_k pour lesquelles 1 est le seul antécédent de k.
   - A_{k2} est l'ensemble des fonctions de A_k pour lesquelles 1 n'est pas le seul antécédent de k.

   Pour dénombrer A_{k1} je décris les étapes qui mènent à la réalisation d'une telle fonction
   - je choisis une fonction surjective $\tilde{f} : [\![2, n]\!] \to \mathbb{F}_p \setminus \{k\}$ $\rightsquigarrow S_{n-1,p-1}$ possibilités.
   - je prolonge cette fonction par $\tilde{f}(1) = k$ $\rightsquigarrow 1$ possibilités.

   D'après le principe des Bergers, il s'ensuit que $\mathsf{Card}\ A_{k1} = S_{n-1,p-1}$.

   Pour dénombrer A_{k2} je décris les étapes qui mènent à la réalisation d'une telle fonction
   - je choisis une fonction surjective $\tilde{f} : [\![2, n]\!] \to \mathbb{F}_p$ $\rightsquigarrow S_{n-1,p}$ possibilités.
   - je prolonge cette fonction par $\tilde{f}(1) = k$ $\rightsquigarrow 1$ possibilités.

   D'où $\mathsf{Card}\ A_{k2} = S_{n-1,p}$. Par additivité du cardinal, s'ensuit que

$$\mathsf{Card}\ (A_k) = S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}.$$

   Finalement, l'ensemble A des applications surjectives de $\mathbb{F}_n$ sur $\mathbb{F}_p$ étant la réunion disjointe des A_k, il vient

$$\begin{aligned} S_{n,p} &= \mathsf{Card}\ (A) = \mathsf{Card}\ \left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \mathsf{Card}\ (A_k) = \sum_{k=1}^{p} [S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}] \\ &= p\,[S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}] \end{aligned}$$

3. Par récurence sur $n \in \mathbf{N}^\star$, montrons que

$$S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

   (a) **Init.** Lorsque $n = 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} k \binom{p}{k} \quad = \quad \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} p \binom{p-1}{k-1} = p(1-1)^{p-1}$$

   Si $p = 1$, on obtient 1, ce qui correspond bien à $S_{1,1}$ et si $p > 1$, on obtient 0 ce qui correspond en effet à $S_{1,p}$.

(b) **Héréd.** soit $n \in \mathbf{N}^\star$ tel que

$$\forall p \in \mathbf{N}^\star,\ S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Vérifions que $n+1$ hérite de cette propriété : soit $p \in \mathbf{N}^\star$, on a :

$$\begin{aligned} S_{n+1,p} &= p\left(S_{n,p} + S_{n,p-1}\right) \\ &= p\left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-1-k}\binom{p-1}{k}k^n\right) \\ &= p\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\left[\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right] k^n + p \times p^n \end{aligned}$$

Appliquons la formule de Pascal et la petite formule des coeff du binôme, il vient :

$$\begin{aligned} S_{n+1,p} &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}p\binom{p-1}{k-1} k^n + p^{n+1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}k\binom{p}{k} k^n + p^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{p-k}\binom{p}{k} k^{n+1} + p^{n+1} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k} k^{n+1} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire.

(c) **Concl.** par récurrence, on a montré que

$$\forall (n,p) \in \mathbf{N}^\star \times \mathbf{N}^\star, \quad S_{n,p} = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}k^n$$

Exercice 9 .— 1. Le nombre de suites $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{F}_n^p$ est n^p.

2. Etant donnée une partie de $\mathbb{F}_n$ à p éléments il n'y a qu'une seule façon de ranger ces éléments par ordre croissant. Par conséquent, il y a autant de de suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et n que de parties à p éléments de $\mathbb{F}_n$, à savoir $\binom{n}{p}$.
3. Etant donnée une suite croissante $a = (a_1, \ldots, a_p)$ de p éléments de$\mathbb{F}_n$, on lui associe la suite $b = (b_1, \ldots, b_p)$ définie par

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ b_k = a_k + k - 1$$

On vérifie aisément que la suite b ainsi construite est une suite strictement croissante d'entiers compris entre 1 et $n+p-1$.
Inversement, étant donnée une suite strictement croissante $b = (b_1, \ldots, b_p)$ de p éléments de $[\![1, n+p-1]\!]$, on lui associe la suite $a = (a_1, \ldots, a_p)$ définie par

$$\forall k \in [\![1,p]\!],\ a_k = b_k - k + 1$$

On vérifie aisément que la suite a ainsi construite est une suite croissante d'entiers compris entre 1 et n.
Finalement, l'ensemble des suites croissantes de p entiers compris entre 1 et n et suites strictement croissantes de p entiers compris entre 1 et $n+p-1$ sont équipotents. Il y a donc $\binom{n+p-1}{p}$ suites croissantes de p entiers compris entre 1 et n. ▲

Exercice 10 .— 1. $S_1 = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p\right\}$.
Pour dénombrer S_1, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'une solution :

- je choisis une partie $\{i_1, \ldots, i_p\}$ à p éléments de $[\![1,n]\!]$ $\rightsquigarrow \binom{n}{p}$ possibilités.
- on pose $x_{i_1} = \cdots = x_{i_p} = 1$ $\rightsquigarrow$ 1 possibilités.
- pour $j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$, $x_j = 0$ $\rightsquigarrow$ 1 possibilités.

Au final, Card $S_1 = \binom{n}{p}$.

2. $S_2 = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbf{N}^\star)^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p\right\}$.
On commence par dénombrer les "sous-solutions" $s_p = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbf{N}^\star)^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq p\right\}$. A une sous-solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on associe la suite $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ définie par

$$\forall k \in [\![1,n]\!],\ u_k = x_1 + \cdots + x_k$$

On observe que la suite $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est strictement croissante car $u_{k+1} - u_k = x_{k+1} \in \mathbf{N}^\star$. De plus $u_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \in [\![1,p]\!]$ car $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in s_p$.
Le procédé qui à $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in s_p$ associe la suite strictement croissante $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ définit une application bijective [2]

$$\Phi : \begin{array}{ccc} s_p & \longrightarrow & \left\{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{F}_p^n \mid (a_k) \text{ strictement croissante } \right\} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & (u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{array}$$

En particulier, Card $(s_p) = \binom{p}{n}$.
Finalement, pour déterminer le cardinal de S_2, on observe que

$$s_p = S_2 \sqcup s_{p-1}$$

Par additivité du cardinal, il s'ensuit que

$$\text{Card } S_2 = \text{Card } (s_p) - \text{Card } (s_{p-1}) = \binom{p}{n} - \binom{p-1}{n} = \binom{p-1}{n-1}$$

[2] quelle est l'application réciproque ? ?

3. Pour cette dernière question, on suit la même démarche que précédemment. On introduit $\sigma_p = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{N}^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq p\right\}$. Comme les x_i peuvent s'annuler, la suite $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ définie par

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ u_k = x_1 + \cdots + x_k$$

est une suite croissante (pas strictement a priori) d'entiers compris entre 1 et n. D'après l'exo 9, on sait que

$$\textsf{Card}\ (\sigma_p) = \binom{n+p-1}{n}$$

Finalement

$$\textsf{Card}\ S_3 = \textsf{Card}\ (\sigma_p) - \textsf{Card}\ (\sigma_{p-1}) = \binom{n+p-1}{n} - \binom{n+p-2}{n} = \binom{n+p-2}{n-1}$$

▲

Exercice 14 .— 1. Il s'agit d'ajouter les cardinaux de toutes les parties de E. L'idée pour calculer cette somme est de discuter suivant le cardinal des parties :

(a) il y a 1 partie de cardinal 0 (partie vide)

(b) il y a n parties de cardinal 1 (singletons)

(c) il y a $\binom{n}{2}$ parties de cardinal 2 (paires)

(d) il y a $\binom{n}{3}$ parties de cardinal 3,

(e) and so on !

Du coup,

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \textsf{Card}\ X = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in \mathscr{P}_k(E)} \textsf{Card}\ (X) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{X \in \mathscr{P}_k(E)} k \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \times \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k \times \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n \times \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n 2^{n-1} \end{aligned}$$

2. Pour calculer S_2 on discute comme précédemment suivant le cardinal de $X \cap Y$. On a

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2, X \cap Y \mathscr{P}_k(E)} \textsf{Card}\ (X \cap Y) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \times \textsf{Card}\ \left\{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \cap Y \mathscr{P}_k(E)\right\} \end{aligned}$$

Tout revient à dénombrer l'ensemble $\left\{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \cap Y \mathscr{P}_k(E)\right\}$. Pour ce faire, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'un tel couple de parties :

- je choisis une partie I à k éléments de E $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités.
- je choisis un couple (X', Y') de parties disjointes dans $\mathscr{P}(E \backslash I) \times \mathscr{P}(E \backslash I)$ $\rightsquigarrow 3^{n-k}$ possibilités(cf exo 7)
- on pose $X = I \sqcup X', Y = I \sqcup Y'$ $\rightsquigarrow 1$ possibilités.

Au final, il y a $\binom{n}{k} 3^{n-k}$ façons de construire un couple (X,Y) de parties de E tel que le cardinal de $X \cap Y$ soit exactement égal à k. En réinjectant dans le calcul de S_2, il vient,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=0}^{n} k \times \textsf{Card}\ \left\{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid X \cap Y \mathscr{P}_k(E)\right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} 3^{n-k} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 3^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 3^{n-1-k} = n 4^{n-1} \end{aligned}$$

3. Etant donnée $(X,Y) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E)$, on a $\textsf{Card}\ (X \cup Y) + \textsf{Card}\ (X \cap Y) = \textsf{Card}\ X + \textsf{Card}\ Y$. En sommant ceci terme à terme, il vient,

$$\begin{aligned} S_2 + S_3 &= \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \textsf{Card}\ (X \cap Y) + \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \textsf{Card}\ (X \cup Y) \\ &= \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \textsf{Card}\ (X) + \sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \textsf{Card}\ (Y) \\ &= 2^n \sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \textsf{Card}\ X + 2^n \sum_{Y \in \mathscr{P}(E)} \textsf{Card}\ Y \\ &= 2^{n+1} S_1 \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que $S_3 = 3n.2^{2n-2}$. ▲

Exercice 15 .— Lorsqu'on a affaire à une somme double un bon refelxe est d'intervertir l'ordre de sommation. Tel que c'est prépsenté, il s'agit d'ajouter pour chaque partie A de $\mathbb{F}_n$ tous ses éléments $i \in A$. Ainsi, chaque entier $i \in \mathbb{F}_n$ sera compté autant de fois qu'il y a de parties de $\mathbb{F}_n$ le contenant : en clair

$$\begin{aligned} \sum_{A \subset \mathbb{F}_n} \sum_{i \in A} i &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{A \subset \mathbb{F}_n \\ i \in A}} i \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \times \textsf{Card}\ \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{F}_n) \mid A \ni i\} \end{aligned}$$

Pour dénombrer $\{A \in \mathscr{P}(\mathbb{F}_n) \mid A \ni i\}$, on décrit les étapes qui mènent à la réalisation d'une telle partie :

- je choisis l'élément i $\rightsquigarrow \binom{n}{k}$ possibilités.
- je choisis une partie dans $\mathscr{P}(E \setminus \{i\})$ $\rightsquigarrow 2^{n-1}$ possibilités

Ainsi, Card $\{A \in \mathscr{P}(\mathbb{F}_n) \mid A \ni i\} = 2^{n-1}$ et par suite

$$\begin{aligned}\sum_{A \subset \mathbb{F}_n} \sum_{i \in A} i &= \sum_{i=1}^{n} i \times \text{Card } \{A \in \mathscr{P}(\mathbb{F}_n) \mid A \ni i\} \\ &= 2^{n-1} \times \sum_{i=1}^{n} i = 2^{n-2} n(n+1)\end{aligned}$$

▲

Exercice 16 .— on met en œuvre le prinicipe des bergers :

1. nombres de mains
   - je choisis 5 cartes parmi 32 $\rightsquigarrow \binom{32}{5}$ possibilités.

   Il y a $\binom{32}{5}$ mains possibles
2. nombre de carrés d'as
   - je choisis 4 as parmi 4 $\rightsquigarrow \binom{4}{4}$ possibilités.
   - je choisis une carte de hauteur différente $\rightsquigarrow \binom{28}{1}$ possibilités

   Il y a 28 carrés d'as possibles
3.
4. nombre de carrés d'as
   - je choisis un couple (h_1, h_2) de hauteurs distinctes $\rightsquigarrow 8 \times 7$ possibilités.
   - je choisis 4 cartes à la hauteur h_1 $\rightsquigarrow \binom{4}{4}$ possibilités.
   - je choisis une carte de hauteur h_2 $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités

   Il y a 224 carrés possibles.

   Remarque : on peut aussi dire 8×28 carrés possibles par symétrie.
5. nombre de fulls
   - je choisis un couple (h_1, h_2) de hauteurs distinctes $\rightsquigarrow 8 \times 7$ possibilités.
   - je choisis 3 cartes à la hauteur h_1 $\rightsquigarrow \binom{4}{3}$ possibilités.
   - je choisis 2 carte de hauteur h_2 $\rightsquigarrow \binom{4}{2}$ possibilités

   Au total , il y a $8 \times 7 \times \binom{4}{3}\binom{4}{2}$ fulls possibles.
6. nombre de brelans
   - je choisis une hauter pour le triplet $\rightsquigarrow 8$ possibilités.
   - je choisis une paire de hauteur $\{h_2, h_3\}$ distinctes entre elles et distinctes de h_1 $\rightsquigarrow \binom{7}{2}$ possibilités.
   - je choisis 3 cartes de hauteur h_1 $\rightsquigarrow \binom{4}{3}$ possibilités
   - je choisis 1 carte de hauteur h_2 $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités
   - je choisis 1 cartes de hauteur h_3 $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités

   Au total , il y a $8 \times \binom{7}{2} \times 4^3$ brelans possibles.
7. nombre de quinte flush
   - je choisis une couleur $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités.
   - je choisis la hauteur de la première carte $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités.

   Au total , il y a 16 quinte flushs possibles.
8. nombre de mains monocrhomes !
   - je choisis une couleur $\rightsquigarrow \binom{4}{1}$ possibilités.
   - je choisis 5 crtes de cette couleur $\rightsquigarrow \binom{8}{5}$ possibilités.

   Au total , il y a 224 mains monochromes possibles. On peut alors retrancher les 16 quintes flush.
9. 3 coeurs et 2 rois ! On distingue 2 cas, suivant que la main continet le roi de coeur ! !

   Avec roi de coeur
   - je choisis le roi de coeur $\rightsquigarrow \binom{1}{1}$ possibilités.
   - je choisis un autre roi $\rightsquigarrow \binom{3}{1}$ possibilités.
   - je choisis 2 autres coeur $\rightsquigarrow \binom{7}{2}$ possibilités.
   - je choisis 1 autre carte $\rightsquigarrow \binom{21}{1}$ possibilités.

   Au total , il y a 3×21^2 mains avec 3 coeurs et 2 rois dont le roi de coeur.

   Sans roi de coeur
   - je choisis 2 rois (pas de coeur) $\rightsquigarrow \binom{3}{2}$ possibilités.
   - je choisis 3 coeur (pas le roi) $\rightsquigarrow \binom{7}{3}$ possibilités.

   Au total , il y a $3 \times \binom{7}{3}$ mains avec 3 coeurs et 2 rois sans le roi de coeur.

   Finalement, il y a 1424 mains contenant exactement deux rois et trois coeurs.
▲

Exercice 17 .— 1. Il s'agit du graphe d'une application injective de $\mathbb{F}_8$ dans lui-même. Il y a 8! façons de placer les huit tours.

2. k colonnes seront occupées par les tours et il y aura exactement une tour dans chacune de ces colonnes
   - je choisis k colonnes $\rightsquigarrow \binom{8}{k}$ possibilités.
   - je remplis les k colonnes comme le graphe d'une injection de $\mathbb{F}_k$ dans $\mathbb{F}_8$ $\rightsquigarrow \dfrac{8!}{(8-k)!}$ possibilités.

   Au total, il y a $k! \times \binom{8}{k}^2$ façons de placer les tours. ▲