# DEVOIR SURVEILLÉ N°02

**durée de l'épreuve 4 heures**

## LISEZ-MOI !

Le sujet est de longueur raisonnable et de contenu très classique. Avant de démarrer l'épreuve prenez le temps nécessaire pour lire l'ensemble du sujet et repérer les parties que vous connaissez bien, et définissez un ordre pour traiter les exercices ou parties du problème, en commençant par ce que vous savez le mieux faire ! !

## COMPOSITION DE L'ÉPREUVE ET BARÊME APPROXIMATIF

- **EXERCICE 1 : Sécante et argument sécante hyperbolique**
  *Mots-clés : étude de fonction, bijection, application réciproque* ................ $\approx$ 4 pt
- **EXERCICE 2 : Autour de la fonction Arc sinus**
  *Mots-clés : domaine de définition, simplification d'expression* ................ $\approx$ 2 pt
- **EXERCICE 3 : Autour de la fonction Argument sinus hyperbolique**
  *Mots-clés : simplification d'expression* ........................................ $\approx$ 3 pt
- **EXERCICE 4 : Résolution d'une équation**
  *Mots-clés : fonctions trigonométriques réciproques* ........................... $\approx$ 2 pt
- **PROBLÈME 1 : Autour de la fonction Arc tangente**
  *Mots-clés : cours, simplification d'expression, résolution d'équation* .......... $\approx$ 10 pt

**Nb :** L'utilisation des **calculatrices** est **interdite**.

## EXERCICE 1 : Sécante et argument sécante hyperboliques

On pose $\operatorname{sch}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$

**1.** Déterminez l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction sch et étudiez sa parité.

**2.** Étudiez les variations de la fonction sch et précisez ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.

**3.** Montrez que la restriction de sch à l'intervalle $[0, +\infty[$ induit une bijection sur un intervalle à préciser.

**4.** On note Argsch son application réciproque. Donnez son ensemble de définition et de continuité ainsi que son tableau de variation. Tracez les courbes représentatives des fonctions sch et Argsch.

**5.** Explicitez la fonction Argsch à l'aide de fonctions usuelles.

**6.** Sur quel ensemble la fonction Argsch est-elle dérivable ? Calculez sa dérivée sur cet ensemble.

## EXERCICE 2 : Autour de la fonction Arc sinus

Soit $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2(1+x^2)}}\right)$.

**1.** Déterminez l'ensemble de définition de $f$.

**2.** Montrez que $f$ est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ et déterminez $f'$.

**3.** Simplifiez l'expression de $f$ sur $]-\infty, 1[$ et $]-\infty, 1[$.

## EXERCICE 3 : Autour de la fonction Argument sinus hyperbolique

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = \operatorname{Argsh}(2x\sqrt{x^2+1})$.
Le but des prochaines questions est d'établir la relation, valide pour tout $x \in D_f$ :

$$f(x) = 2\operatorname{Argsh}(x)$$

**1.** **première méthode :** à l'aide du changement de variable $t = \operatorname{Argsh}(x)$.

**2.** **deuxième méthode :** en étudiant la dérivée de $f$.

**3.** **troisième méthode :** à l'aide de l'expression logarithmique de Argsh.

## EXERCICE 4 : Résolution d'une équation

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation

$$\operatorname{Arcsin}(2x) - \operatorname{Arcsin}(x\sqrt{3}) = \operatorname{Arcsin}(x) \qquad (1)$$

**1.** On suppose que $x$ est une solution de l'équation (1). Montrez que $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et qu'il vérifie :

$$2x\sqrt{1-3x^2} - x\sqrt{3}\sqrt{1-4x^2} = x \qquad (2)$$

**2.** Résolvez l'équation (2) et concluez.

## PROBLÈME 1 : Autour de la fonction Arc tangente

### Partie I. Question de cours

**1.** Montrez que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

**2.** Montrez que Arctan est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculez sa dérivée.

**3.** Montrez que

- Pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout $x \in \mathbf{R}^{-\star}$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x) = -\frac{\pi}{2}$.

**4.** Déterminez les primitives de la fonction Arctan.

### Partie II. Sommes d'arc tangentes

Soit $a \in \mathbf{R}$. On pose $f_a(x) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)$.

**1.** Déterminez en fonction de $a$, l'ensemble de définition $\mathcal{D}_a$ de $f_a$.

**2.** Montrez que $f_a$ est dérivable dans $\mathcal{D}_a$ et explicitez $f_a'$.

**3.** Calculez $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} f_a(x)$.

**4.** En distinguant suivant l'intervalle, déduisez des résultats précédents une expression simplifiée de $f_a$ sur $\mathcal{D}_a$.
**Indication :** il y a un intervalle lorsque $a = 0$, et deux intervalles lorsque $a \neq 0$.

**5.** Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. À l'aide des questions précédentes, montrez que

$$\operatorname{Arctan}(a) + \operatorname{Arctan}(b) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \text{ si et seulement si } ab < 1$$

### Partie III. Applications

**1. Résolution d'une équation**

**a.** Calculez $\operatorname{Arctan}(2) + \operatorname{Arctan}(5) + \operatorname{Arctan}(8)$.

**b.** Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation

$$\operatorname{Arctan}(x-3) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}$$

**2. Somme finie d'arc tangentes**

**a.** Soit $p \in \mathbf{N}^\star$. Calculez $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{p}{p+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{p-1}{p}\right)$.

**b.** Déduisez-en la limite, quand $n$ tend vers $+\infty$ de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2p^2}\right)$.

**Fin du sujet**