Corrigé du Devoir Surveillé n°2

Exercice 1 : Autour de la fonction Arc cosinus

Représentons la fonction définie par $f(x) = \text{Arccos}\,(\cos x) + \dfrac{1}{2}\text{Arccos}\,(\cos 2x)$.

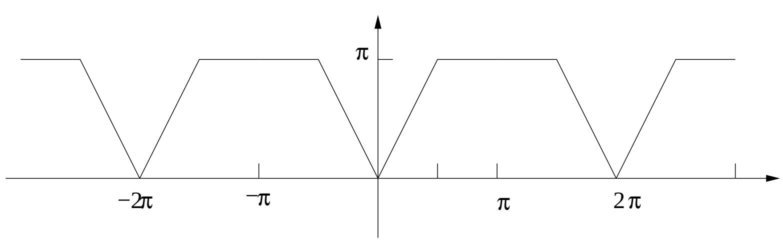
- f est définie sur $\mathbf{R}$,
- f est paire,
- f est 2π périodique

Nous étudions f sur $[0, \pi]$, puis complétons par symétries : .

- Etude de $g(x) = \text{Arccos}\,(\cos x)$ sur $[0, \pi]$.
  Soit $x \in [0, \pi]$, alors $\text{Arccos}\,(\cos x) = x$.
- Etude de $h(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}\,(\cos 2x)$ sur $[0, \pi]$.
  - si $x \in [0, \pi/2]$, alors $2x \in [0, \pi]$ donc $\text{Arccos}\,(\cos 2x) = 2x$ et par suite $h(x) = x$.
  - si $x \in [\pi/2, \pi]$, alors $2x \in [\pi, 2\pi]$, d'où $\cos(2x) = \cos(2\pi - 2x)$. Comme $2\pi - 2x \in [0, \pi]$, nous avons $h(x) = \dfrac{1}{2}\text{Arccos}\,(\cos(2\pi - 2x)) = \pi - x$.

Ainsi, $f = g + h$ est définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, \pi/2] \\ \pi & \text{si} \quad x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$.

En complétant par parité puis par périodicité, nous obtenons le graphe suivant :



▲

Exercice 2 : Autour de la fonction Arc tangente

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. On pose $t = \text{Arctan}\,(x)$ de sorte que $x = \tan(t)$ et $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Il s'ensuit que
   - **a.** $\tan(t) = x$ ▲
   - **b.** $\cos(t) = \sqrt{\cos^2(t)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(t)}} = \dfrac{1}{1 + x^2}$. ▲
   - **c.** finalement $\sin(t) = \tan(t) \times \cos(t) = x \times \dfrac{1}{1 + x^2}$. ▲
2. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$.

a. D'après la formule d'addition pour les cosinus, il vient

$$\begin{aligned}
& \cos\big(\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)\big) \\
= & \cos(\operatorname{Arctan}(x))\cos(\operatorname{Arctan}(1/x)) - \sin(\operatorname{Arctan}(x))\sin(\operatorname{Arctan}(1/x)) \\
= & \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} \\
= & \frac{|x|}{1+x^2} - \frac{|x|}{1+x^2} = 0
\end{aligned}$$

Posons $t = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)$. On a donc établi que $\cos(t) = 0$. En outre

- si $x > 0$, alors $0 < \operatorname{Arctan}(x) < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \operatorname{Arctan}(1/x) < \frac{\pi}{2}$. En ce cas, on a $0 < t < \pi$ et $\cos(t) = 0$, d'où l'on tire que $t = \frac{\pi}{2}$.
- si $x < 0$, alors $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(x) < 0$ et $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan}(1/x) < 0$. En ce cas, on a $-\pi < t < 0$ et $\cos(t) = 0$, d'où l'on tire que $t = -\frac{\pi}{2}$.

Finalement

- pour tout $x \in \mathbf{R}^{+\star}$, $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$
- pour tout $x \in \mathbf{R}^{-\star}$, $\quad \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$

▲

b. Soit $h : \mathbf{R}^\star \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}^\star,\ h(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(1/x)$$

La fonction h est dérivable sur $\mathbf{R}^\star$ (comme somme de telles fonctions) et pour tout réel $x \in \mathbf{R}^\star$,

$$h'(x) \;=\; \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(1/x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Comme sa dérivée est nulle sur chacun des intervalles $\mathbf{R}^{-\star}$ et $\mathbf{R}^{+\star}$, h est constante sur chacun de ces intervalles. Pour calculer cette contante, évaluons h en 1 et -1. Il vient $f(1) = \operatorname{Arctan}(1) + \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$ et $f(-1) = 2\operatorname{Arctan}(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. ▲

3. Résolvons l'équation $\operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1) = \pi/2$.

on peut procéder par Analyse-synthèse, mais ici comme on peut directement appliquer le th de la bijection, cette méthode sera plus rapide !

a. **Existence et unicité de la solution**

La fonction $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1)$ est continue et strictement croissante comme somme de telles fonctions. D'après le **Théorème de la bijection** elle réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. En particulier $\dfrac{\pi}{2}$ admet un unique antécédent par cette fonction.

ce qui revient précisément à dire que l'équation proposée admet une unique solution, n'est-ce pas ?

b. **Calcul de la solution**

Soit $x \in \mathbf{R}$ la solution de l'équation proposée. Remarquons tout d'abord que x est nécessairement strictement positif car $f(0) = 0 < f(x) = \frac{\pi}{2}$. En ce cas,d'après la question précédente, on a

on va appliquer tan aux deux membres de l'équation, mais avant tout il est

$$\begin{aligned}\text{Arctan}\,(x-1)+\text{Arctan}\,(x+1) &= \frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\,(x)\\ &= \text{Arctan}\,(1/x)\end{aligned}$$

Appliquons tan aux deux membres de cette dernière égalité, il vient

$$\frac{2x}{1-(x^2-1)}=\frac{1}{x}$$

d'où l'on tire successivement que $x^2=\dfrac{2}{3}$, puis $\mathcal{S}=\left\{\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}$ ▲

comme x est strictement positif

Exercice 3 : Autour de la fonction Arc sinus

On pose $f(x)=\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Tout d'abord, la fonction $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ est définie sur $\mathbf{R}$. On cherche maintenant les valeurs de x pour lesquelles $u(x)$ appartient à $[-1,1]$. Pour tout $x\in\mathbf{R}$, on a $|x|<\sqrt{x^2+1}$, donc

$$-1<\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}<1.$$

Comme la fonction u est définie sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[\subset[-1,1]$, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}=\mathbf{R}$.

Arcsin est définie sur $[-1,1]$.

2. On sait que la fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. La fonction u est dérivable sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $]-1,1[$. Comme $f=\text{Arcsin}\circ u$, on en déduit, par composition, que f est dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour $x\in\mathbf{R}$, on a :

$(\text{Arcsin}\circ u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\times\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

3. On vient de voir que f a la même dérivée que la fonction Arctan. Par conséquent, ces deux fonctions sont égales à une constante C près :

$$\forall x\in\mathbf{R},\quad f(x)=\text{Arctan}\,x+C.$$

Comme $f(0)=\text{Arcsin}\,0=0$ et $f(0)=\text{Arctan}\,0=0$, on en déduit que la constante C est nulle. Ainsi, f est la fonction arc tangente.

4. Soit $x\in\mathbf{R}$. Pose $t=\text{Arctan}\,(x)$ dsq $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ et $x=\tan(t)$. On a alors $\cos(t)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ et par conséquent

$$\sin(t)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ \text{avec}\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},$$

ce qui revient précisément à dire que $t=\text{Arcsin}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ ▲

Exercice 4 : Etude d'une bijection réciproque

Soit f la fonction définie par $f(x) = \text{Arccos}\,(1-2x)$.

Partie I. Etude d'une fonction f

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, $f(x)$ est définie pourvu que $1-2x \in [-1,1]$, d'où l'on tire que $\mathcal{D} = [0,1]$.
2. f est continue sur $\mathcal{D}$ comme composée de telles fonctions, et dérivable dans $]0,1[$ comme composée de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in]0,1[$

Arccos *est continue sur* $[-1,1]$ *et dérivable sur l'ouvert* $]-1,1[$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}}$$

▲

3. En particulier, f' est strictement positive dans $]0,1[$. D'après la **caractérisation des fonctions monotones dérivables**, Il s'ensuit que f est strictement croissante comme l'indique le tableau ci-contre :

	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	π

4. Au point d'abscisse $\frac{1}{2}$, la tangente admet pour équation $y = 2x-1$. ▲

l'équation de la tangente en a *est* $y = f(a) + f'(a)(x-a)$

Partie II. Etude de sa bijection réciproque

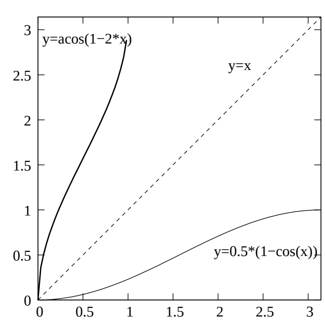
1. La fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue et strictement croissante. D'après le **Théorème de la bijection**, f réalise une bijection de $[0,1]$ sur $f([0,1]) = \big[f(0); f(1)\big] = [0,\pi]$. ▲
2. Pour déterminer la bijection réciproque de f, on adopte le **point de vue équation** Soit donc $y \in [0,\pi]$ et $x \in [0,1]$. On a alors les équivalences :

$$y = \text{Arccos}\,(1-2x) \iff \cos(y) = 1-2x \iff x = \frac{1-\cos(y)}{2}$$

Ainsi, $f^{-1} : [0,\pi] \to [0,1]$ est définie pour tout $y \in [0,\pi]$,par $f^{-1}(y) = \dfrac{1-\cos y}{2}$. ▲

3. f^{-1} est dérivable sur $[0,\pi]$ par OPA et pour tout $y \in [0,\pi]$, on a $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{\sin y}{y}$. ▲
4. *Laisse parler le talent !*

trobo ! !



PROBLEME 1 : Autour de Argth,mines de sup 00

On notera respectivement ch , sh et th les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies pour $x \in \mathbf{R}$ par :

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Partie I. Cours : étude de la fonction Argth

1. Par opa, la fonction th est dérivable dans **R** et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\operatorname{th}'(x) = \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} > 0$. Par conséquent, th : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est strictement croissante. Le tableau suivant résume ses propriétés :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{th}'x$		$+$	
$\operatorname{th} x$	-1	$\nearrow$	$+1$

Pour $x \in \mathbf{R}$, on a $\operatorname{th}(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$. On en déduit aisément par OPA que $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{th} = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{th} = -1$.

D'après le **Théorème de la bijection**, th étant strictement croissante et continue, elle réalise une bijection de **R** sur son intervalle image :

$$J = \left] \lim_{-\infty} \operatorname{th}, \lim_{+\infty} \operatorname{th} \right[=]-1, 1[$$

Comme d'habitude, on note Argth $:]-1,1[\to \mathbf{R}$ sa bijection réciproque. ▲

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. En utilisant les relations $\operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x)$, on obtient aisément $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2(x)$. ▲

3. Soit $x \in \mathbf{R}$, posons $t = -\operatorname{Argth}(x)$. Comme la fonction th est impaire, il vient est impaire. $\operatorname{th}(t) = -\operatorname{th}(\operatorname{Argth}(x)) = -x$. Par définition, ceci revient à dire que $t = \operatorname{Argth}(-x)$. Autrement dit, $-\operatorname{Argth}(x) = \operatorname{Argth}(-x)$.
Ceci étant vrai pour tout réel x, on a bien prouvé que la fonction Argth est impaire. ▲

4. D'après la question **1.**, th est dérivable dans **R** et sa dérivée ne s'annule pars dans **R**. D'après le théorème de dérivablilité des applications réciproques, il s'ensuit que Argth est dérivable dans $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\operatorname{Argth}'(x) = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{Argth}(x))} = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{Argth}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$

▲

5. Soit $x \in]-1,1[$. Posons $t = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$. En ce cas,

$$\operatorname{th}(t) = \frac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{(1+x) + (1-x)} = \frac{2x}{2} = x$$

Ainsi, $\operatorname{th}(t) = x$, ce qui revient à dire que

$$\boxed{\operatorname{Argth}(x) = t = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}$$

▲

Partie II. Simplification d'une expression

Dans cette partie, on se propose de simplifier l'expression de la fonction définie par

$$h(x) = \operatorname{Argth}\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right).$$

1. La fonction Argth est définie sur $]-1,1[$. La fonction h est bien définie si $\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2} \in]-1,1[$. Or, pour tout $x \in]-1,1[$, on a les équivalences :

Formule du binôme !!

$$\begin{aligned} \left|\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right| < 1 &\iff |3x+x^3| < 1+3x^2 \\ &\iff 0 < 1-3|x|+3|x|^2-|x|^3 \\ &\iff 0 < (1-|x|)^3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $\left|\dfrac{3x+x^3}{1+3x^2}\right|$ est strictement inférieur à 1, de sorte que h est bien définie sur $]-1,1[$. ▲

2. **Première méthode :** à l'aide du changement de variable $y = \operatorname{Argth}(x)$.

a. Soit $y \in \mathbf{R}$. Les formules d'addition et de duplication pour la tangente donnent successivement :

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(3y) &= \operatorname{th}(2y+y) = \frac{\operatorname{th}(2y)+\operatorname{th}(y)}{1+\operatorname{th}(2y)\times\operatorname{th}(y)} = \frac{\dfrac{2\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th}^2 y}+\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th} y\,\dfrac{2\operatorname{th} y}{1+\operatorname{th}^2 y}} \\ &= \frac{2\operatorname{th} y+\operatorname{th} y+\operatorname{th}^3 y}{1+\operatorname{th}^2 y+2\operatorname{th}^2 y} = \frac{3\operatorname{th} y+\operatorname{th}^3 y}{1+3\operatorname{th}^2 y} \end{aligned}$$

b. Soit $x \in]-1,1[$, posons $y = \operatorname{Argth}(x)$, de sorte que $x = \operatorname{th} y$, avec $y \in \mathbf{R}$. En ce cas, d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} h(x) &= \operatorname{Argth}\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right) = \operatorname{Argth}\left(\frac{3\operatorname{th} y+\operatorname{th}^3 y}{1+3\operatorname{th}^2 y}\right) \\ &= \operatorname{Argth}(\operatorname{th}(3y)) = 3y = 3\operatorname{Argth}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 3\operatorname{Argth} x$. ▲

3. **Deuxième méthode :** à l'aide de la dérivée.

a. h est dérivable sur $]-1,1[$ comme composée de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{1-\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)^2} \times \frac{(3+3x^2)\times(1+3x^2)-6x\times(3x+x^3)}{(1+3x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1-\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)^2} \times \frac{3-6x^2+3x^4}{(1+3x^2)^2} \\ &= \frac{3(1-x^2)^2}{(1+6x^2+9x^4)-(9x^2+6x^4+x^6)} \\ &= 3\frac{(1-x^2)}{(1-x^2)^3} = \frac{3}{1-x^2} \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction $x \mapsto 3\mathrm{Argth}\, x$ est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $x \in]-1,1[$, sa dérivée en x est aussi égale à $\frac{3}{1-x^2}$. ▲

b. D'après la question précédente, les fonctions h et $x \mapsto 3\mathrm{Argth}\, x$ ont même dérivée sur l'intervalle $]-1,1[$. Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$h(x) = C + 3\mathrm{Argth}\, x$$

Pour déterminer la valeur de cette constante, évaluons l'égalité fonctionnelle ci-dessus, au point 0, il vient $C = f(0)$. Comme $\mathrm{Argth}\,(0) = 0$, il s'ensuit que $C = 0$, c'est-à-dire que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 3\mathrm{Argth}\, x$. ▲

4. **Troisième méthode :** à l'aide de l'expression logarithmique de Argth.

a. Soit $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\frac{3x+x^3}{1+3x^2}+1}{\frac{3x+x^3}{1+3x^2}-1}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3x+x^3+1+3x^2}{1+3x^2-3x-x^3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x)^3}{(1-x)^3}\right) = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= 3\,\mathrm{Argth}\, x \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = 3\mathrm{Argth}\, x$. ▲

Partie III. Etude d'une équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, telles que $f(0) = 0$ et

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \qquad f(2x) = \frac{2f(x)}{1+(f(x))^2} \tag{1}$$

1. D'après la règle de duplication pour la tangente hyperbolique, th est solution du problème posé. ▲

On considère désormais, une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ solution du problème posé.

2. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a d'après (1), $f(x) = \dfrac{2f(x/2)}{1+f^2(x/2)}$. Notons pour alléger, $y = f(x/2)$, de sorte que $f(x) = \dfrac{2y}{1+y^2}$. Or pour tout $y \in \mathbf{R}$, il découle de l'inégalité $(1-|y|)^2 \geq 0$ que $2|y| \leq 1+y^2$. Autrement dit,

identité remarquable

$(1-|y|)^2 = 1+y^2-2|y|$

$$|f(x)| = \left|\frac{2f(x/2)}{1+f^2(x/2)}\right| \leq 1$$

▲

3. Dans cette question, on montre par l'*absurde* que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-1 < f(x) < 1$.
On *suppose au contraire* qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 1$ (le cas analogue, où $f(x_0) = -1$ pourra être admis).

a. Posons pour alléger $x_n = \dfrac{x_0}{2^n}$ et montrons par récurrence sur $n \in \mathbf{N}$, que $f(x_n) = 1$.

- **Init.** lorsque $n = 0$, $f(x_0) = 1$.
- **Hér.** soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $f(x_n) = 1$. D'après (1)

$$1 = f(x_n) = f(2x_{n+1}) = \frac{2f(x_{n+1})}{1+f^2(x_{n+1})}.$$

Ainsi,

toujours la même **identité remarquable**

$$(1-f(x_{n+1}))^2 = 0$$

d'où l'on tire que $f(x_{n+1}) = 1$.

- **Ccl.** par récurrence, on a montré que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = 1$, c'est-à-dire que pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}$,

$$f\left(\frac{x_0}{2^n}\right) = 1$$

▲

b. Lorsque n tend vers $+\infty$, la suite (x_n) est convergente de limite nulle. D'après la **caractérisation séquentielle de la continuité**, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(x_n) &= 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ f(x_n) &= 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0) \end{aligned}$$

Par **unicité de limite**, il en résulte finalement que $f(0) = 1$, ce qui *contredit le fait* que $f(0) = 0$. En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$, on obtient montrez que l'on obtient ainsi à une contradiction.

ces théorèmes seront étudiés en détail dans le chapitre limites des fonctions

c. D'après les deux questions précédentes, la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ est à valeurs dans l'intervalle ouvert $]-1,1[$. ▲

4. On considère alors la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $g(x) = \operatorname{Argth}(f(x))$.

Remarque : d'après la question précédente, la fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est bien définie comme composée de fonctions.

a. Soit $x \in \mathbf{R}$, alors $f(x) \in]-1, 1[$. Posons $t = \text{Argth}\,(f(x))$, de sorte que $t \in \mathbf{R}$ et $f(x) = \text{th}\,(t)$. Avec ces notations, il vient :

$$\begin{aligned} g(2x) &= \text{Argth}\, f(2x) = \text{Argth}\left(\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}\right). \\ &= \text{Argth}\left(\frac{2\text{th}\,(t)}{1+\text{th}^2(t)}\right) \\ &= \text{Argth}\,(\text{th}\,(2t)) = 2t = 2\text{Argth}\,(f(x)) = 2g(x) \end{aligned}$$

▲

b. g est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbf{R}$ comme composée de telles fonctions. De plus, elle vérifie pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g(2x) = 2g(x)$$

Dérivons cette égalité entre fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, il vient $2g'(2x) = 2g'(x)$, d'où l'on tire finalement que $g'(x) = g'(2x)$. ▲ **Règle de dérivation en chaîne**

c. On pose $a = g'(0)$. Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. On observe que d'après la question précédente, $g'(x) = g'(x/2) = g'(x/4) = \cdots = g'(x/2^n)$. En passant à la limite lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient : *récurrence immédiate*

$$\begin{aligned} g'(\frac{x}{2^n}) & & \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(0) = a \\ g'(\frac{x}{2^n}) &= g'(x) & \xrightarrow[n\to\infty]{} g'(x) \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, il en résulte $g'(x) = a$.
Ceci étant vrai pour tout réel x, on en déduit que g est une fonction affine définie sur $\mathbf{R}$ par

$$g(x) = ax + b$$

Comme en outre $g(0) = 0$, on en déduit que $b = 0$. Finalement, g est une fonction linéaire, de la forme, $g(x) = ax$.

5. Résumons les étapes précédentes :

- **analyse :** si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, solution du problème posé, alors f est à valeurs dans $]-1, 1[$ et il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$. $\text{Argth}\,(f(x) = ax$, d'où l'on tire que

$$\text{pour tout réel } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \text{th}\,(ax).$$

- **synthèse :** réciproquement, si $a \in \mathbf{R}$, la fonction f définie par $f(x) = \text{th}\,(ax)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbf{R}$ et vérifie, d'après la règle de duplication pour les tangentes hyperboliques, la relation fonctionnelle (1).
- **conclusion :** par analyse -synthèse, on a montré que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient l'équation (1) sont les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par

$$\boxed{\text{pour tout réel } x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \text{th}\,(ax), \text{ où } a \in \mathbf{R}}$$

▲