

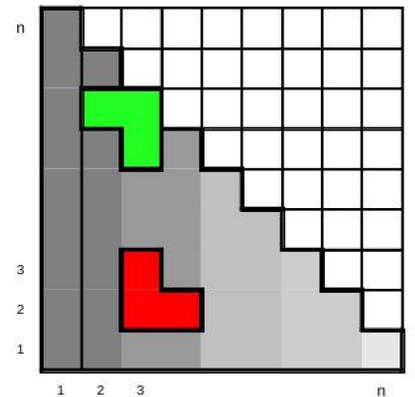
# PAVAGES EN L ET ANTI-L

Par Benjamin DAGORN et Alexandre HENRIOT

## Les règles du jeu

On considère un triangle  $\Delta_n$  constitué de  $n$  colonnes de hauteurs  $n, n-1, \dots, 2, 1$ . On s'intéresse aux conditions pour que  $\Delta_n$  puisse être pavé (recouvert sans chevauchement) à l'aide des deux motifs élémentaires  (motif L) et  (anti-L).

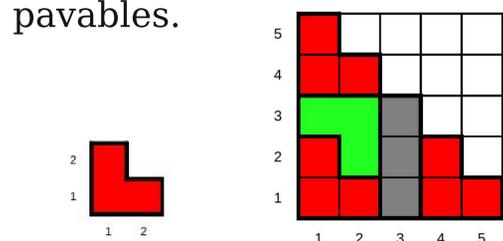
*Le triangle  $\Delta_n$  est constitué de  $n$  colonnes de hauteurs décroissantes.* 



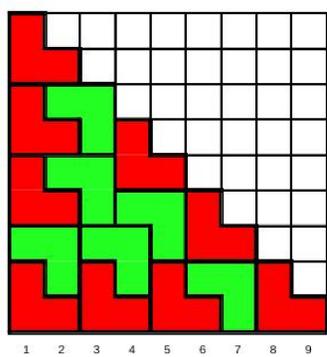
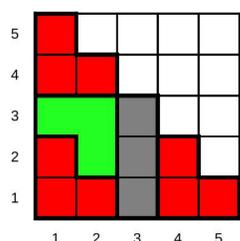
## Exemples de pavages

Voici quelques exemples de pavages en  et .

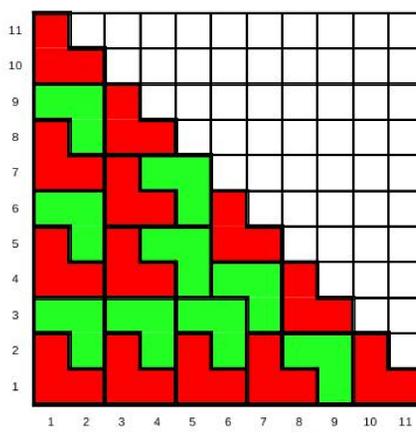
A noter :  $\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5, \Delta_6, \Delta_7, \Delta_8$  et  $\Delta_{10}$  ne sont pas pavables.



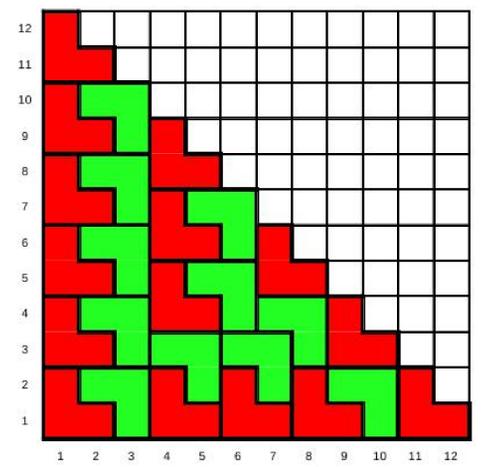
$\Delta_2$  est un   $\Delta_5$  est non pavable.



$\Delta_9$  est pavable.



$\Delta_{11}$  est pavable.



$\Delta_{12}$  est pavable.

## Condition nécessaire

Pour que  $\Delta_n$  soit pavable, il est nécessaire que son nombre de cases soit multiple de 3 !

**Proposition 1 :**  $\Delta_n$  est constitué de  $n(n+1)/2$  cases.

Si  $\Delta_n$  est pavable, alors  $n(n+1)$  est multiple de 6.

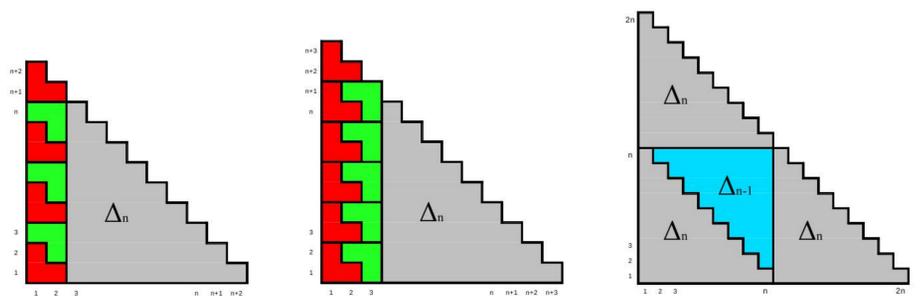
## Règles de construction

Partant d'un pavage de  $\Delta_n$ , nous avons démontré des règles permettant de paver d'autres triangles.

**Proposition 2 :** On suppose que  $\Delta_n$  est pavable.

- Si  $n$  est multiple de 3 alors  $\Delta_{n+2}$  est pavable,
- Si  $n+1$  est multiple de 2 alors  $\Delta_{n+3}$  est pavable.

**Proposition 3 :** Si  $\Delta_n$  et  $\Delta_{n-1}$  sont pavables, alors  $\Delta_{2n}$  et  $\Delta_{2n-1}$  sont pavables.



## Nos résultats

A l'aide de nos règles de construction, nous avons observé un cycle modulo 12.

**Théorème 1 :** pour tout entier  $n$

- Si  $n \equiv 0, 2, 9, 11 \pmod{12}$  alors  $\Delta_n$  est pavable,
- Si  $n \equiv 1, 4, 7, 10 \pmod{12}$  alors  $\Delta_n$  n'est pas pavable.

**Conjecture :** pour tout entier  $n$

- Si  $n \equiv 3, 5, 6, 8 \pmod{12}$  alors  $\Delta_n$  n'est pas pavable.

**Conclusions :** grâce à nos résultats nous pouvons affirmer qu'il existe une infinité de  $n$  pour lesquels  $\Delta_n$  est pavable, et une infinité de  $n$  pour lesquels  $\Delta_n$  n'est pas pavable. Malgré nos nombreuses tentatives, nous n'avons pas réussi à montrer la conjecture.