Atelier Mathématique du Lycée Rabelais 2012-2013

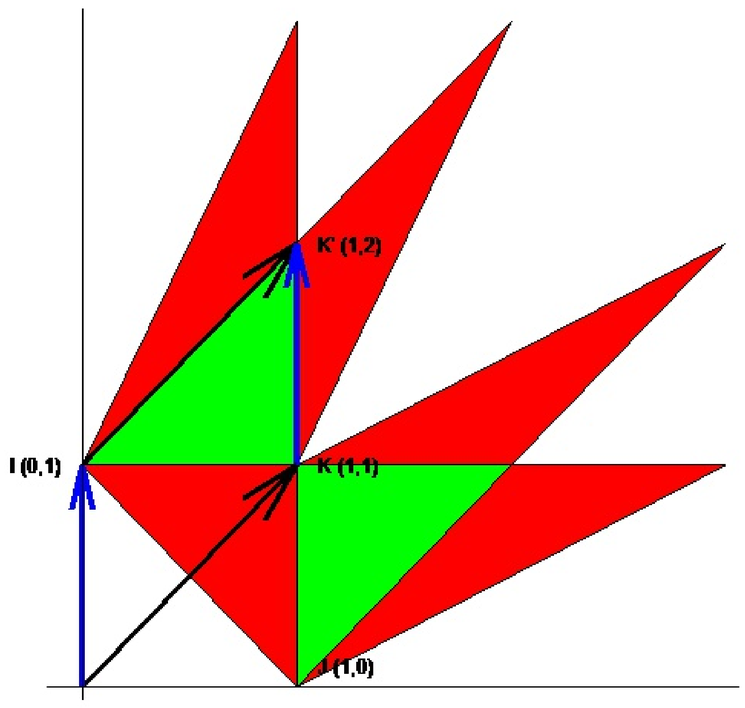
LE LABYRINTHE DES NOMBRES

Par Clément HARDY et Corentin OGIER

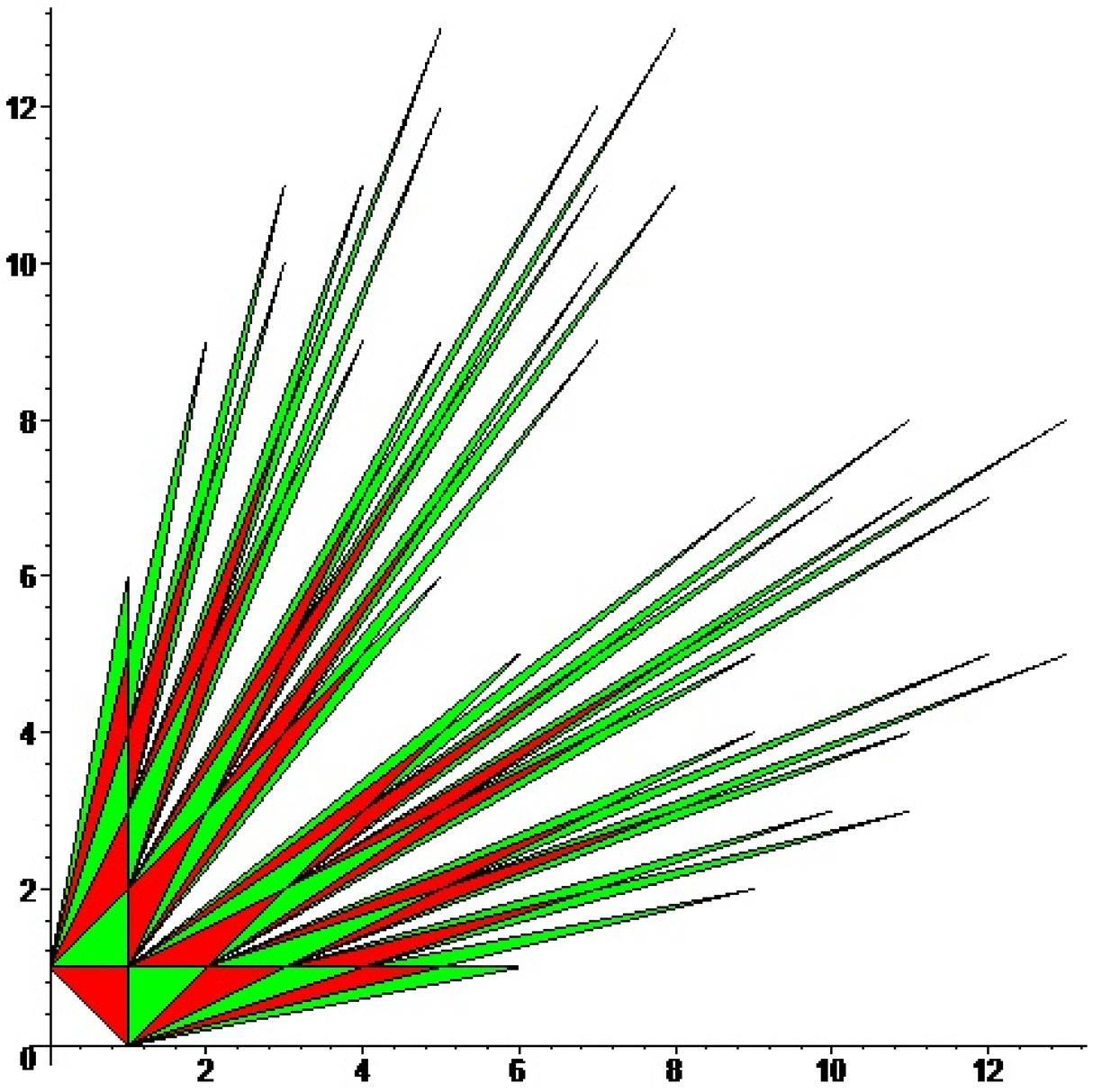
La construction du labyrinthe

La première pièce du labyrinthe est le triangle IKJ de coordonnées I(0,1); K(1,1); J(1,0). Ce triangle a une entrée le segment [IJ] et deux sorties les segments [IK] et [JK] qui mènent à deux autres pièces triangulaires obtenues en formant les parallélogrammes OJK'K à gauche et OIKK''à droite.

On répète ce procédé indéfiniment pour obtenir le labyrinthe...



La construction du labyrinthe.



Les six premières générations de pièces du labyrinthe.

La trajectoire d'un réel r strictement positif

Le réel r est représenté dans le labyrinthe par la droite d'équation y=r.x . Elle traverse une succession de pièces du labyrinthe en entrant d'un côté pour en sortir par la gauche (G), par la droite (D) ou s'arrêter au sommet (S). Ainsi r est codé par une suite de symboles G, D ou S.

A la $n^{ième}$ étape, on note G_n et D_n les extrémités de la porte franchie. On a alors $\delta_n \leq r_n \leq \gamma_n$ où γ_n et δ_n sont les pentes des droites (OG_n) et (OD_n).

Exemple : le nombre d'or $\Phi=(1+\sqrt{5})/2$ est codé par (G,D,G,D,G,D,G,D,G,...)

Nos résultats mathématiques

Théorème 1: Les suites (γ_n) et (δ_n) sont adjacentes et convergent vers le réel r.

Théorème 2: À tout codage correspond un réel r unique.

Il n'y a pas unicité du codage. Les rationnels ont un codage fini et un autre infini stationnaire.

Théorème 3: Tous les sommets des pièces du labyrinthe ont des coordonnées entières et premières entre elles.
Réciproquement, tout point M(x;y), à coordonnées entières et premières entre elles est le sommet d'une pièce du labyrinthe.

Nos programmes informatiques

Nous avons créé plusieurs programmes informatiques dans les deux sens :

➡ du codage vers le réel

➡ du réel vers le codage.

Un dernier programme nous donne, à partir d'un point à coordonnées entières et premières entre elles, les sommets des pièces ayant permis sa construction.